תרגיל 7

18 בדצמבר 2012

1. יהי V מרחב וקטורי, $\langle\ \rangle$ מרחב מכפלה פנימית על V. הוכח: לכל $v \in V$, $\langle w,v\rangle = 0 \Leftrightarrow w = \bar{0}$.
2. יהי V מרחב וקטורי, $\langle\ \rangle_1, \langle\ \rangle_2$ מכפלות פנימיות על V. הוכח $\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_1 + \langle\ \rangle_2$ הוא גם מכפלה פנימית על V.
3. נגדיר אינטגרל של פולינום באופן הבא $\int(a_nx^n+\ldots+a_0)dx = \frac{a_{n+1}}{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_0x$. עבור פולינום $a,b \in \mathbb{F}$ נגדיר אינטגרל מסויים באופן הבא: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, כאשר $F(x) = \int f(x)\,dx$.
יהיו $a,b \in \mathbb{R}$.
   (א) הוכח $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ הוא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}[x]$, (אוסף כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים).
   (ב) הוכח $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ הוא מכפלה פנימית על $\mathbb{C}[x]$ (אוסף כל הפולינומים מעל המרורכבים).
4. יהי V מרחב מכפלה פנימית n־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, $v_1,\ldots,v_n$ בסיס של V, $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$. הוכח שקיים וקטור יחיד w כך ש $\langle w,v_i\rangle = c_i$.
5. הראה $\left\langle \sum a_ix^i, \sum b_jx^j \right\rangle = \sum_{i,j}\frac{a_ib_j}{i+j+1}$ הוא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}[x]$. נסמן $\mathbb{R}_n[x]$ מרחב כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל n. נשים לב $\langle\ \rangle$ מהווה מכפלה פנימית גם על $\mathbb{R}_n[x]$. מצא מטריצת גרם של $\langle\ \rangle$ ביחס לבסיס $\{1,x,\ldots,x^n\}$.
(רמז: חשב את האינטגרל $\int_0^1 fg$ על מנת להראות מכפלה פנימית).
6. תזכורת: מטריצה הרמטית היא מטריצה שמקיימת $A = A^*$, כאשר $A^* = \overline{A^t}$.
   (א) הוכח שהערכים העצמיים של מטריצה הרמטית הם ממשיים
   (ב) וקטורים עצמיים שמתאימים לערכים עצמיים שונים אורתוגונליים זה לזה.

   (רמז: מכפלה פנימית סטנדרטית).
7. יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכח שהנורמה $\|\ \|$ שמושרית מהמכפלה הפנימית על V מקיימת $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.