תרגול 10

משוואה מדויקת

למשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ קוראים משוואה מדוייקת אם האגף השמאלי של המשוואה מייצג דיפרנציאל שלם של פו' כלשהי.

משפט אוילר

המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

דרך לפתרון משוואה מדויקת

$$u(x,y)=c\Leftarrow du=M(x,y)dx+N(x,y)dy, M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

מטרה לחשב את $u(x,y)$.

מכיוון ש $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ נקבל ש

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

ואז $(1)u(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y)$

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=N(x,y)$

$$\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+c'(y)=N(x,y)$$

ואז

$$c'(y)=-\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+N(x,y)$$

מכיוון שזו משוואה מדויקת נקבל שהאגף הימני של המשוואה תלוי ב y בלבד ולכן נוכל למצוא את $c(y)$. נציב ב (1) ונקבל $u(x,y)$ נשווה לקבוע ונקבל את הפתרון.

תרגיל

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

נבדוק שהמשוואה מדויקת

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$$

ואז $u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+c(y)$

נקבל ש $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+c(y)$.

נגזור לפי y ונקבל

$$6x^2y+4y^3=6x^2y+c'(y)$$
$$c'(y)=4y^3$$
$$c(y)=y^4$$

נציב חזרה ונקבל $u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$.

הפתרון הוא $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$.

גורם אינטגרציוני

בהינתן משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ נמצא פונקציה μ כך שהמשוואה $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ תהייה משוואה מדויקת.

שיטה זו נקראת שיטת גורם אינטגרציוני.

הערה: לא תמיד ניתן לפתור את המשוואה הלא מדויקת בצורה זאת.

כדי שהמשוואה $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ תהייה מדויקת צריך להתקיים

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu \,.$$

תרגיל

פתור בעזר שיטת הגורם האינטגרציוני את המשוואה $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$

אם ידוע שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד.

פתרון

מכיוון שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד נקבל ש $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ נציב המשוואה שקיבלנו

קודם ונקבל $\frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$ נציב במשוואה ונקבל

$$-x^2\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(x^2y - x^3\right) + \left(2xy - 3x^2\right)\cdot \mu \Rightarrow \left(2x^2 - 2xy\right)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(x^2y - x^3\right)$$

$$2x(x-y)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(-x^2\right)(x-y) \Rightarrow 2x\mu = -x^2\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{2}{x}\partial x$$

$$\ln\mu = -2\ln x \Rightarrow \ln\mu = \ln\frac{1}{x^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

הגורם האינטגרציוני הוא $\frac{1}{x^2}$ ואז המשוואה $\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)dy = 0$ היא מדוייקת.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y - x\end{cases} \Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + c(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x + c'(y) \Rightarrow y - x = -x + c'(y)$$

ולכן $c'(y) = y \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2}$ נציב חזרה ונקבל $c = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2}$.

מערכת משוואות

מטרה לפתור מערכת משוואות ליניאריות מהצורה

$$\begin{cases} y_1' = \sum_{l=1}^{n} a_{1l} y_l \\ . \\ . \\ . \\ y_n' = \sum_{l=1}^{n} a_{nl} y_l \end{cases}$$

דוגמא למערכת משוואות

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 \\ y_2' = -1y_1 - 4y_2 + 7y_3 \\ y_3' = 4y_1 - 5y_2 + 8y_3 \end{cases}$$ ואז $$\begin{aligned} &a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5, a_{21} = -1, a_{22} = -4 \\ &a_{23} = 7, a_{31} = 4, a_{32} = -5, a_{33} = 8 \end{aligned}$$

דרך לפתרון

הפתרונות הם מהצורה

$y_1 = \beta_1 e^{\lambda x}, y_2 = \beta_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = \beta_n e^{\lambda x} \Leftarrow y_1' = \lambda\beta_1 e^{\lambda x}, y_2' = \lambda\beta_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n' = \lambda\beta_n e^{\lambda x}$.

נציב במערכת המשוואות ונקבל

$$\begin{cases} \lambda\beta_1 e^{\lambda x} = \sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_l e^{\lambda x} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_n e^{\lambda x} = \sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_l e^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\beta_1 - \sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_l = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_n - \sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - a_{11})\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + (\lambda - a_{1n})\beta_n = 0 \end{cases}$$

למערכת המשוואות הנ"ל יהיו פתרונות לא טרויאלים רק כאשר הדטרמיננטה שח המקדמים תהייה אפס.

מסקנה יש למצוא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים.

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + 4z \end{cases}$

נמצא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

נמצא את β_1, β_2 עבור $\lambda = 0$ ונקבל $\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 + 4\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$

נמצא את β_1, β_2 עבור $\lambda = 5$ ונקבל $\begin{cases} -4\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -4\beta_1$

סה"כ הפתרון הוא

$$y = c_1 + c_2 e^{5x}$$

$$z = c_1 - 4c_2 e^{5x}$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = 5y - 4z \\ z' = 9y + 5z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \lambda = 5 \pm 6i$

נמצא את β_1, β_2 עבור $\lambda = 5 + 6i$

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} -6i\beta_1 - 4\beta_2 = 0 \\ 9\beta_1 - 6i\beta_2 = 0 \end{cases} \Leftarrow 3\beta_1 i = -2\beta_2$

$\beta_1 = 2i, \beta_2 = 3$

$$\begin{matrix} y = 2ie^{5x}\left(\cos(6x) + i\sin(6x)\right) \\ z = 3e^{5x}\left(\cos(6x) + i\sin(6x)\right) \end{matrix} \Leftarrow \begin{matrix} y = e^{5x}\left(-2\sin(6x) + 2i\cos(6x)\right) \\ z = e^{5x}\left(3\cos(6x) + 3i\sin(6x)\right) \end{matrix}$$

תשובה

$$y = -2c_1e^{5x}\sin(6x) + 2c_2e^{5x}\cos(6x)$$
$$z = 3c_1e^{5x}\cos(6x) + 3c_2e^{5x}\sin(6x)$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = 5y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow (5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0 \Leftarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Leftarrow \lambda = 4$$

ולכן הפתרון הוא מהצורה $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} \Leftarrow y' = 4c_1e^{4x} + c_2e^{4x} + 4c_2xe^{4x}$

$z = c_3e^{4x} + c_4xe^{4x} \Leftarrow z' = 4c_3e^{4x} + c_4e^{4x} + 4c_4xe^{4x}$

מהמשוואה הראשונה נקבל

$$4c_1e^{4x} + c_2e^{4x} + 4c_2xe^{4x} = 5c_1e^{4x} + 5c_2xe^{4x} + c_3e^{4x} + c_4xe^{4x}$$
$$-c_1 + c_2 - c_3 = (c_2 + c_4)x \Rightarrow c_4 = -c_2, c_3 = -c_1 + c_2$$

תשובה

$$\begin{cases} y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} \\ z = (c_2 - c_1)e^{4x} - c_2xe^{4x} \end{cases}$$