תרגול 3 – חדוו"א 1 לביולוגיה חישובית

נושא השיעור: סדרה מונוטונית, גבול סדרה, הגדרת הגבול ושיטות לחישוב.

הגדרה

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מונוטונית עולה אם קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_n \le a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית עולה ממש אם לכל $n \ge n_0$, $a_n < a_{n+1}$.

הסדרה היא מונוטונית יורדת אם קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_n \ge a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית יורדת ממש אם לכל $n \ge n_0$, $a_n > a_{n+1}$.

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

הערה

כדי להוכיח שסדרה מונוטונית עולה יש להראות ש קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_{n+1} - a_n \ge 0$.

אם הסדרה חיובית אז יש להראות ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$.

באותו אופן ניתן להראות מונוטונית יורדת.

תרגיל

הוכח שהסדרה $n^2 + n$ עולה.

פתרון

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 \ge 0$$

תרגיל

הוכח שהסדרה $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

פתרון

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

תרגיל

הוכח שהסדרה $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n$ מונוטונית עולה.

פתרון

נשים לב ש

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[(n+1)!\right]^2 \cdot 4^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 4^n \cdot 4 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{4n+4}{4n+1} > 1$$

הערה

נניח שיש פונקציה גזירה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(x)$ וקיים n_0 כשלכל $x \ge n_0$ מתקיים $f'(x) \ge 0$ אז הסדרה מונוטונית עולה.

דוגמא

הוכח שהסדרה $a_n = \arctan n$ מונוטונית עולה.

הוכחה

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Leftarrow f(x)=\arctan x$ ולכן $f'(x)\geq 0$ ואז הסדרה מונוטונית עולה.

הגדרה

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. נאמר שהמספר L היא גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

אם לסדרה יש גבול אזי נאמר כי הסדרה מתכנסת ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

אם לסדרה אין גבול אז נאמר שהסדרה מתבדרת.

תרגיל

הוכח לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$.

פתרון

לכל $\varepsilon>0$ נבחר $n_0=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז לכל $n\geq n_0$ נקבל ש

$$|a_n-1|=\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}=\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1}<\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil}\leq\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$$

משפט - אריתמטיקה של גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות ונניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ אזי:

א. לכל קבוע c $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=cA$.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A+B$.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n=AB$.

ד. אם בנוסף לנתונים הנ"ל, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $b_n\neq 0, B\neq 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}$.

דוגמא

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=1$$

שיטות לחישוב גבול

שיטה 1

סדרה מהצורה - $a_n=\frac{p_t(n)}{p_k(n)}$. כאשר $p_k(n)=\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot n^i, p_t(n)=\sum_{i=1}^{t}b_i\cdot n^i$

אם $t>k$ הסדרה מתבדרת.

אם $t<k$ הגבול הוא אפס.

אם $t=k$ הגבול הוא $\frac{b_k}{c_k}$.

דוגמאות

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n-1}{2n^4+n^3}$ מתקיים $t=k$ ולכן הגבול הוא $\frac{3}{2}$.

הסבר: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n-1}{2n^4+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n-1}{2n^4+n^3}\cdot\frac{1/n^4}{1/n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}$.

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n-1}{2n^2+n}$ מתקיים $t>k$ ולכן הסדרה מתבדרת (או שקיים גבול במובן הרחב)

הסבר: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n-1}{2n^2+n}\cdot\frac{1/n^4}{1/n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\infty$.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n^4+n^3}$ מתקיים $t<k$ ולכן הגבול הוא אפס.

הסבר: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n^4+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n^4+n^3}\cdot\frac{1/n}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2n^3+n^2}=0$.

שיטה 2

כאשר בהצגת האיבר הכללי של הסדרה יש ביטוי מהצורה $\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}$ אז החשב את הגבול של הביטוי הבא

$\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)\cdot\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}=\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$.

חשוב לזכור:

א. השיטה לא תמיד מצליחה.

ב. השיטה טובה בד"כ עבור: $\infty-\infty$.

דוגמאות

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=4$.

שיטה 3

משפט

אם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ואם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אז הסדרה $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס.

דוגמא

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\ln n}$. נסמן $b_n=\cos n$ ואז הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. נסמן $a_n=\frac{1}{\ln n}$ ואז מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ולפי המשפט $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\cos n\cdot\frac{1}{\ln n}=0$.

<u>שיטה 4</u>

<u>משפט</u>

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ אזי הסדרה $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים השוויון $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

<u>דוגמא</u>

חשב את גבול הסדרה $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}}$.

נסמן $a_n=\frac{(2n)!}{((n)!)^2}$ ואז $a_{n-1}=\frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2}$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}}{\frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2}}=\frac{(2n-2)!\cdot(2n-1)\cdot(2n)}{((n-1)!)^2\cdot n^2}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}\xrightarrow{n\to\infty}4$$

ולכן גבול הסדרה $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}}$ הוא 4.

<u>שיטה 5</u>

<u>משפט שטולץ</u>

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהיא, ותהיי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש ולא חסומה. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

<u>דוגמא</u>

חשב את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+\ldots+(2n-1)\cdot(2n)}{n^3}$.

נסמן $b_n=1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+\ldots+(2n-1)\cdot(2n)$ ואז $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש ולא חסומה.

$b_{n+1}-b_n=(2n+1)\cdot(2n+2)=4n^2+6n+2$.

נסמן $a_n=n^3$ ולכן $a_{n+1}-a_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$. כעת

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{3n^2+3n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{3}{4}.$$

<u>שיטה 5</u>

שימוש בגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. (ראיתם בהרצאה)

<u>דוגמא</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-2}+\frac{3}{n-2}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-2)/3}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(n-2)/3}\right)^{\frac{n-2}{3}}\right)^{3\frac{(3n+2)}{n-2}}=e^{9}$$

<u>הערה</u>

לעיתים ניתן להראות שהגבול גם אם לא ניתן למצוא את הגבול עצמו.

<u>משפט</u>

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

<u>דוגמא</u>

נוכיח שהסדרה $a_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

הסדרה מונוטונית עולה מכיוון שכל איבר מתקבל ע"י הוספת מספר חיובי לאיבר הקודם לו.

נשאר להוכיח שהסדרה חסומה.

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\le 1-\frac{1}{n}<1$ הראינו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.