דוגמאות לחבורות

דוגמה

1. $(\mathbb{Z},+,0)$ חבורה.
2. $(\mathbb{Z}_n,+,[0])$ חבורה.
3. $(\mathcal{U}_n,\cdot,[1])$ חבורה.
4. יהי $(\mathbb{F},+,\cdot,1,0)$ שדה.
   - $(\mathbb{F},+,1)$ חבורה.
   - $(\mathbb{F}\backslash\{0\},\cdot,0)$ חבורה.
5. יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי $1 \leq n$.
   $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ חבורה.
6. יהיו G,H חבורות.
   $G \times H$ חבורה, כאשר:

$$(g,h)\cdot(g',h') \quad \coloneqq \quad (g\cdot g',h\cdot h')$$

$$1_{G\times H} \quad = \quad (1_G,1_H)$$

דוגמה

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

מתקיים:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \ncong \quad \mathbb{Z}_4 \quad \cong \quad \mathcal{U}_5 \quad \cong \quad \mathcal{U}_{10}$$

מתקיים:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \cong \quad \mathcal{U}_8 \quad \cong \quad \mathcal{U}_{12}$$

7. יהי $1 \leq n$.
   נגדיר:

$$\mathcal{X} \quad \coloneqq \quad \{1,\cdots,n\}$$

נגדיר:

$$S_n \quad \coloneqq \quad \{\sigma\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X} \mid \sigma \text{ חד חד ערכית ועל}\}$$

$(S_n,\circ,I)$ חבורה.

מתקיים :

$$|S_n| = n!$$

■

תת-חבורה נורמלית

טענה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

התכונות הבאות שקולות:

1. לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} = H$$

2. לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} \subseteq H$$

3. לכל $g \in G$:

$$gH = Hg$$

4. כל קוסט שמאלי של H הוא קוסט ימני.
5. כל קוסט ימני של H הוא קוסט שמאלי.

הוכחה

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} = H$$

בפרט, לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} \subseteq H$$

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} = H$$

לכן, לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1}g = Hg$$

$$\Downarrow$$

$$gH = Hg$$

$\boxed{1 \Leftarrow 3}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gH = Hg$$

לכן, לכל $g \in G$:

$$g^{-1}Hg = g^{-1}gH$$

$$\Downarrow$$

$$g^{-1}Hg = H$$

$\boxed{4 \Leftarrow 3}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gH = Hg$$

יהי Hg קוסט שמאלי של G.

עפ"י ההנחה:

$$Hg = gH$$

לכן, Hg קוסט ימני של G.

$\boxed{5 \Leftarrow 3}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gH = Hg$$

יהי gH קוסט ימני של G.

עפ"י ההנחה:

$$gH = Hg$$

לכן, gH קוסט שמאלי של G.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

נניח כי לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} \subseteq H$$

לכן, לכל $g \in G$:

$$g^{-1}Hg \subseteq H$$

לכן:

$$gg^{-1}Hgg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

לכן:

$$H \subseteq gHg^{-1}$$

לכן, לכל $g \in G$:

$$gHg^{-1} = H$$

$\boxed{4 \Rightarrow 3}$

נניח כי כל קוסט שמאלי של H הוא גם קוסט ימני.

יהי $g \in G$.

עפ"י ההנחה, קיים $g' \in G$ כך ש:

$$Hg = g'H$$

מתקיים:

$$g \in gH$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} g &\in Hg \\ &\in g'H \end{aligned}$$

לכן:

$$g \in gH \cap g'H$$

בפרט:

$$gH \cap g'H \neq \emptyset$$

עפ"י משפט:

$$gH = g'H$$
$$= Hg$$

$\boxed{3 \Leftarrow 5}$

באופן דומה.

■

הגדרה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

כאשר מתקיימים תנאי המשפט הקודם, נאמר ש H – **תת-חבורה נורמלית** של G, ונסמן:

$$H \trianglelefteq G$$

הערה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G: \quad \forall x \in H: \quad gxg^{-1} \in H$$

הגדרה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

קוסט ימני של H עבור $a \in G$ הוא הקבוצה:

$$aH := \{ax | x \in H\}$$

מספר הקוסטים הימניים של H מסומן ע"י:

$$[G : H]_r$$

תרגיל

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

מתקיים:

$$[G:H]_r = [G:H]$$

הערה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא תת-חבורה.

תרגיל

הוכח!

הערה

בחבורה אבלית, כל תת-חבורה היא נורמלית.

הגדרה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

נגדיר:

$$G_{/H} := \{aH | a \in G\}$$

הגדרה

תהי G חבורה, ותהיינה $A, B \subseteq G$ קבוצות.

נגדיר:

$$A \cdot B := \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$$

טענה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

מכפלה של קוסטים ימניים של H היא קוסט ימני של H אם ורק אם H נורמלית.

הוכחה

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי: $H \trianglelefteq G$.

יהיו $a, b \in G$.

לכן:

$$\begin{aligned} aH \cdot bH &= a(Hb)H \\ &= a(bH)H \\ &= ab(H \cdot H) \\ &= abH \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי לכל $a, b \in G$ קיים $c \in G$ כך ש:

$$aH \cdot bH = cH$$

יהי $b \in G$.

עפ"י ההנחה, בפרט קיים $c \in G$ כך ש:

$$H \cdot bH = cH$$

מתקיים:

$$b \in bH$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} b &\in HbH \\ &\in cH \end{aligned}$$

לכן:

$$b \in bH \cap cH$$

בפרט:

$$bH \cap cH \neq \emptyset$$

עפ"י משפט:

$$bH = cH$$

מתקיים:

$$Hb \subseteq HbH$$
$$\subseteq bH$$

לכן:

$$b^{-1}Hb \subseteq H$$

עפ"י משפט:

$$H \trianglelefteq G$$

$\blacksquare$

מסקנה

תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה.

אם $G \trianglelefteq H$, אז $G_{/H}$ תת-חבורה.

$\blacksquare$