חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 3 – פתרון

.1

א. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

$f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$ כהרכבה של פונקציות רציפות

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=1$$

$f(x,y)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ אם מתקיים:

$$f(h_1,h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}=h_1+h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

צריך לבדוק האם:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2\frac{1}{n^3}}-2\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$$

$\Leftarrow$ הפונקציה $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ב. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק את רציפות הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x=y\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0$$

$\Leftarrow$ הפונקציה $f(x,y)$ אינה רציפה בנקודה $(0,0)$ ולכן <u>אינה</u> דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג.

$$f\left(x,y,z\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & \left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)\\ 0 & \left(x,y,z\right)=\left(0,0,0\right)\end{cases}$$

1) נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $\left(0,0,0\right)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}=\lim_{\substack{t\to0\\ t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}=0=f\left(0,0,0\right)$$

$\Leftarrow f\left(x,y,z\right)$ רציפה בנקודה $\left(0,0,0\right)$.

2) נבדוק את קיום הנגזרות החלקיות בנקודה $\left(0,0,0\right)$

$$f_x\left(0,0,0\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(t,0,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{\sqrt{t^2}}}=0$$

$$f_y\left(0,0,0\right)=0$$

$$f_z\left(0,0,0\right)=0$$

3) על מנת שהפונקציה תהייה דיפרנציאבילית צריך להתקיים

$$f\left(h_1,h_2,h_3\right)-f\left(0,0,0\right)=f_x\left(0,0,0\right)h_1+f_y\left(0,0,0\right)h_2$$
$$+f_z\left(0,0,0\right)h_3+o\left(\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2+{h_3}^2}\right)$$

ז"א צריך לבדוק האם

$$\lim_{\substack{h_1\to0\\ h_2\to0\\ h_3\to0}}\frac{1}{\left({h_1}^2+{h_2}^2+{h_3}^2\right)^{3/2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2+{h_3}^2}}}=\lim_{\substack{t=\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2+{h_3}^2}\\ t\to0}}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}=0$$

$\Leftarrow f\left(x,y,z\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0,0\right)$.

2. תהי

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

א.

נבדוק את הרציפות בנקודה $\left(0,0\right)$

$$\lim_{\substack{x=y^2\\ y\to0}}\frac{2y^4}{2y^4}=1\neq0$$

$\Leftarrow f\left(x,y\right)$ אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

ב. יהי $\vec{h}=(\cos\theta,\sin\theta)$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$, $\left\|\vec{h}\right\|=1$ נחשב את $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\quad \forall\theta\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

עבור $\theta=\frac{\pi}{2}$ נקבל $\vec{h}=(0,1)\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial\vec{h}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$

ועבור $\theta=\frac{3\pi}{2}$ נקבל $\vec{h}=(0,-1)\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial\vec{h}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,-t)-f(0,0)}{t}=0$

$\Leftarrow$לכל וקטור $\vec{h}$, כך ש $\left\|\vec{h}\right\|=1$ הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ קיימת .

ג. $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ כי היא לא רציפה בנקודה זו .

3.

א. $f(x,y)=x\sin(x+y)$

$$\vec{h}=(-1,0)\quad a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$) כהרכבה וכפל של פונקציות רציפות וכן הנגזרות החלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$).

$$f_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$$
$$f_y=x\cos(x+y)$$

ולכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$) , ולכן ניתן להשתמש במשפט האומר :

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\nabla f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\bullet(-1,0)$$
$$\left\|\vec{h}\right\|=1$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=1$$
$$f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial h}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=(1,0)\bullet(-1,0)=-1$$

ב. $f\left(x,y,z\right)=xy^2z^3$

$\vec{h}=\left(4,3,0\right)$

$a=\left(3,2,1\right)$

$$\left\|\vec{h}\right\|=\sqrt{16+9}=5$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{h}}{\left\|\vec{h}\right\|}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$$

$f\left(x,y,z\right)$ דיפרנציאבילית ב $\mathbb{R}^3$ (בפרט בנקודה $\left(3,2,1\right)$), ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(3,2,1\right)=\nabla f\left(3,2,1\right)\bullet\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$$

$$\nabla f\left(3,2,1\right)=\left(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2\right)\Big|_{(3,2,1)}=\left(4,12,36\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}\left(3,2,1\right)=\left(4,12,36\right)\bullet\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)=\frac{16}{5}+\frac{36}{5}=\frac{52}{5}$$

4. נגדיר $f\left(x,y,z\right)=x^2+2y^2+3z^2-6$

משוואת המישור המשיק למשטח $f\left(x,y,z\right)=0$ בנקודה $\left(1,-1,1\right)$ היא :

$$f_x\left(1,-1,1\right)\left(x-1\right)+f_y\left(1,-1,1\right)\left(y+1\right)+f_z\left(1,-1,1\right)\left(z-1\right)=0$$

$$f_x\left(1,-1,1\right)=2x\Big|_{(1,-1,1)}=2$$

$$f_y\left(1,-1,1\right)=4y\Big|_{(1,-1,1)}=-4$$

$$f_z\left(1,-1,1\right)=6z\Big|_{(1,-1,1)}=6$$

$$\Rightarrow 2\left(x-1\right)-4\left(y+1\right)+6\left(z-1\right)=0$$

$$2x-4y+6z=12$$

$$\boxed{x-2y+3z=6}$$

5. מצאו נקודה על המשטח $z=3x^2-y^2$ שבה המישור המשיק למשטח מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

משוואת המישור המשיק למשטח $z=3x^2-y^2$ בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ היא :

$$6x_0\left(x-x_0\right)-2y_0\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0$$

מישור זה צריך להיות מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

וקטור נורמל למישור המשיק הוא $\left(6x_0,-2y_0,-1\right)$. על מנת שהמישור המשיק יהיה מקביל למישור $6x+4y-z=5$, וקטורי הנורמל של שני המישורים צריכים להיות מקבילים , ז"א

$$\left(6x_0,-2y_0,-1\right)=\lambda\left(6,4,-1\right)$$

$$\begin{cases}6x_0=6\lambda\\ -2y_0=4\lambda\\ -1=-\lambda \qquad \lambda=1\Rightarrow x_0=1,\ y_0=-2\Rightarrow z_0=3x_0^2-y_0^2=-1\end{cases}$$

בנקודה $\left(1,-2,-1\right)$ המישור המשיק למשטח $z=3x^2-y^2$ מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

פתרונות לתרגילים נוספים:

תשס"ח 1 בס"ד

אנליזה מתקדמת 1 / פתרון תרגיל מס' 3

1. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

ⓐ וקטור יחידה כללי: $(\cos\varphi,\sin\varphi)$, מחפשים נגזרת מכוונת של f בנקודה $(0,0)$.

תזכורת:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a):=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

אצלנו:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|t^2\cos\varphi\sin\varphi|}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{|t|\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}}{t}=\begin{cases}\xrightarrow{t\to 0^+}\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}\\ \xrightarrow{t\to 0^-}-\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}\end{cases}$$

הגבול קיים רק כאשר

$$-\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}=\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$$

כלומר:

$$\cos\varphi\sin\varphi=0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\sin 2\varphi}{2}=0$$
$$\Downarrow$$
$$2\varphi=\pi k$$
$$\boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}k}$$

כלומר, הנגזרת המכוונת קיימת רק עבור הכיוונים בהם $\varphi=\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbb{Z})$

ⓑ משפט: אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אז $\overset{⊛}{\nabla f_{(x)}\cdot h=\frac{\partial f}{\partial h}(x)}$

$\|h\|=1$; $x\in A$

אצלנו $x=(0,0)$ ו- h וקטור יחידה כלשהו, אבל ראינו בסעיף ⓐ שהנגזרת המכוונת לא קיימת
כמו כן, למשל נניח $\nabla f_{(0,0)}=(0\ 0)$ ולכן שוויון ⊛ לא יתקיים עבור כל וקטור יחידה
ולכן f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

2. מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח:

$x+8y^2+27z^2=21$ (1)

שמקביל למישור: (2) $x+8y+18z=1$

<u>הנורמל של מישור (2):</u> $\vec{N}=(1,8,18)$.

הגרדיאנט של המשטח: $F(x,y,z)=x+8y^2+27z^2-21=0$

<u>הוא:</u>

$$\vec{\nabla F}=(1,16y,54z)$$

(נחפש נקודה על <u>המשטח</u> (x_0,y_0,z_0) כך ש- $\vec{N}=\nabla F$ (כדי שיהיו מקבילים)
(באופן כללי צריך לדרוש $\vec{N}=t\cdot\nabla F$ על
מנת שהם יהיו מקבילים)

$$(1,16y,54z)=(1,8,18)$$

$\Leftarrow$ x משתנה חופשי (נמצא אותו אח"כ לנקודה)

$$16y=8$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{y_0=\frac{1}{2}}$$
$$54z=18$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z_0=\frac{1}{3}}$$

נמצא את x_0, כך שהנקודה על המשטח: $x_0+8\cdot\overset{2}{\frac{1}{4}}+27\cdot\overset{3}{\frac{1}{9}}-21=0$

$$x_0+5-21=0$$
$$\boxed{x_0=16}$$

כעת נותר למצוא את משוואת המישור עם הנורמל $(1,8,18)$ העובר דרך הנקודה $(16,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

<u>משוואת מישור כללי:</u> $Ax+By+Cz+d=0 \Rightarrow x+8y+18z+d=0 \Rightarrow 16+4+6+d=0$

$\underline{d=-26}$.

כלומר, משוואת המישור הוא: $\boxed{x+8y+18z=26}$

3

$$f(x,y) = y^2\sqrt{x+4} \qquad .3$$

נמצא נגזרת מכוונת $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ של וקטור יחידה h בנקודה $a=(0,2)$

$\underline{f(0,2) = 8}\ (4\cdot\sqrt{4} = 4\cdot 2 = 8) \qquad h = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,2) := \lim_{t\to 0}\frac{f((0,2)+th) - \overset{8}{f(0,2)}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\varphi, t\sin\varphi+2) - 8}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t\sin\varphi+2)^2\sqrt{t\cos\varphi+4} - 8}{t} \underset{\boxed{\frac{0}{0}}}{\overset{\text{לופיטל}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{2(t\sin\varphi+2)\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{t\cos\varphi+4} + (t\sin\varphi+2)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t\cos\varphi+4}}\cdot\cos\varphi}{1} =$$

(נגזרת של מכפלה)

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2(t\sin\varphi+2)\cdot\sin\varphi\, 2(t\cos\varphi+4) + \cos\varphi(t\sin\varphi+2)^2}{2\sqrt{t\cos\varphi+4}} = \frac{32\sin\varphi + 4\cos\varphi}{4} = \underline{8\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

משוואת המישור המשיק שלו:

$$(z - z_0) = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$$

או, וקטור הנורמל הוא: $\vec{N} = (f'_x, f'_y, -1)$

$f'_x = y^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{y^2}{2\sqrt{x+4}}$

$f'_y = 2y\sqrt{x+4}$

$\vec{N} = (1, 8, -1)$

בנקודה $(0,2,f(0,2)) = (0,2,8)$

<u>בנקודה (0,2):</u>

$f'_x(0,2) = \frac{4}{4} = 1$

$f'_y(0,2) = 8$

$x + 8y - z + d = 0$

$\Leftarrow\ 0 + 16 - 8 + d = 0$

$\Leftarrow\ \boxed{d = -8}$

<u>כלומר:</u>

משוואת המישור המשיק היא:

$$\boxed{x + 8y - z = 8}$$