# פתרון תרגיל בית 6 בתורת החבורות
# 88-218 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1** (חימום)**.** תהי קבוצה $A=\{a,b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על $A$. מי מהן טרנזיטיבית?

פתרון. ישנן בדיוק שתי פעולות. האחת, הפעולה הטריוויאלית המוגדרת לפי $g*a=a$, $g*b=b$ לכל $g\in\mathbb{Z}_2$. היא לא טרנזיטיבית, כי המסלול של $a$ כולל רק את $a$.

הפעולה השנייה היא "הפעולה שהופכת", המוגדרת לפי

$$0*a=a,\quad 0*b=b,\quad 1*a=b,\quad 1*b=a$$

והיא כן טרנזיטיבית. האם אתם רואים את הקשר לפעולת הכפל משמאל של $\mathbb{Z}_2$ על עצמה?

**שאלה 2** (חזרה)**.** חשבו כמה מחזורים מאורך $2\le r\le n$ יש בחבורה $S_n$.

פתרון. זו שאלה קומבינטורית. בוחרים $r$ מספרים מתוך $n$ ויש $\binom{n}{r}$ אפשרויות כאלה.

כעת יש לסדר את $r$ המספרים ב-$r!$ דרכים שונות. אבל ספרנו יותר מידי אפשרויות, כי יש $r$ מחזורים זהים, שהרי

$$(a_1,\dots,a_r)=(a_2,\dots,a_r,a_1)=\dots=(a_r,a_1,\dots,a_{r-1})$$

לכן נחלק את המספר הכולל ב-$r$. נקבל שמספר המחזורים מאורך $r$ ב-$S_n$ הינו $\binom{n}{r}\cdot(r-1)!$
.

**שאלה 3.** תהי $\pi=(1,2,3,4)\,(5,6,7)\,(8,9,10)\in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.

פתרון. המרכז $C_{S_{10}}(\pi)$ הוא המייצב לגבי פעולת ההצמדה של $S_{10}$ על עצמה. המסלול הוא מחלקת הצמידות של $\pi$, וידוע לנו כי

$$|\mathrm{conj}(\pi)|=[S_{10}:C_{S_{10}}(\pi)]=\frac{|S_{10}|}{|C_{S_{10}}(\pi)|}$$

ולכן מספיק לחשב כמה תמורות צמודות ל-$\pi$ ב-$S_{10}$. אך מחלקות צמידות ב-$S_n$ נקבעות לפי מבנה המחזורים. כמה מחזורים יש מן המבנה $(4,3,3)$? ודאו שאתם יודעים לפתור את השאלה הקומבינטורית הזו ולקבל:

$$\begin{aligned}|C_{S_{10}}(\pi)|&=\frac{|S_{10}|}{|\mathrm{conj}(\pi)|}=\frac{10!}{\binom{10}{4}(4-1)!\binom{10-4}{3}(3-1)!\binom{6-3}{3}(3-1)!\frac{1}{2!}}\\&=\frac{10!}{\frac{10!}{4!6!}3!\frac{6!}{3!3!}2!\frac{3!}{3!0!}2!\frac{1}{2!}}=72\end{aligned}$$

**שאלה 4.** תהי $G$ חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e\neq x\in G$ מתקיים $x^{-1}\notin\mathrm{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של $x$ לא שייך למחלקת הצמידות של $x$).

פתרון. נניח בשלילה כי $x^{-1} \in \operatorname{conj}(x)$. כלומר $x$ צמוד להופכי שלו, ולכן קיים $g \in G$ כך ש-$gxg^{-1} = x^{-1}$. נצמיד את המשוואה האחרונה שוב ב-$g$ ונקבל

$$ggxg^{-1}g^{-1} = gx^{-1}g^{-1} = \left(gxg^{-1}\right)^{-1} = x$$

ולכן $g^2x = xg^2$. החבורה $G$ היא סופית מסדר אי זוגי, ולכן הסדר של $g$ הוא אי זוגי, נניח $o(g) = 2m+1$. לכן $e = g^{2m+1} = g\left(g^2\right)^m$, וקיבלנו כי $g^{-1} = \left(g^2\right)^m$. נציב זאת במשוואה $gxg^{-1} = x^{-1}$ ונקבל

$$x = g\left(g^2\right)^m x = gx\left(g^2\right)^m = x^{-1}$$

ולכן $x = x^{-1}$, שזו סתירה כי $x$ אינו איבר היחידה ואין בחבורה איברים מסדר 2.

**שאלה 5.** תהי $G$ חבורה ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את המְרַכֵּז של $S$ ב-$G$ להיות

$$C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S, gs = sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s \in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

א. הוכיחו שאם $S \subseteq T \subseteq G$ תת־קבוצות, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

ב. הוכיחו

$$C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s) = \bigcap_{s \in \langle S \rangle} C_G(s) = C_G(\langle S \rangle)$$

והסיקו כי $C_G(S) \leq G$.

ג. תנו דוגמה לחבורה $G$ ותת־קבוצה $S$ כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

ד. תנו דוגמה לחבורה $G$ ותת־קבוצה $S$ כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

פתרון.

א. יהי $g \in C_G(T)$. אזי לכל $t \in T$ מתקיים $gt = tg$. מפני ש-$S \subseteq T$, אז בפרט לכל $t \in S$ מתקיים $gs = sg$. כלומר $g \in C_G(S)$, ולכן $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

ב. נתחיל בהוכחת $C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_G(s)$:

$$g \in C_G(S) \Leftrightarrow \forall s \in S, gs = sg \Leftrightarrow \forall s \in S, g \in C_G(s) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{s \in S} C_G(s)$$

ראינו בכיתה כי $C_G(s)$ הוא תת־חבורה, והוכחתם שחיתוך תת־חבורות הוא תת־חבורה. לכן $C_G(S) \leq G$.
הוכחת $\bigcap_{s \in \langle S \rangle} C_G(s) = C_G(\langle S \rangle)$ נובעת ישירות מהחישוב הקודם כאשר מחליפים את $S$ ב-$\langle S \rangle$ (שהרי גם $\langle S \rangle$ היא תת־קבוצה לא ריקה של $G$). מפני ש-$S \subseteq \langle S \rangle$, אז לפי הסעיף הקודם $C_G(\langle S \rangle) \subseteq C_G(S)$ ונותר לנו להוכיח את ההכלה בכיוון השני. יהי $g \in C_G(S)$, אזי הוא מתחלף עם כל איברי $S$. מכאן ש-$g$ גם מתחלף עם כל חזקה של איברי $S$, כולל חזקות שליליות. יהי $s_1^{\pm 1} \ldots s_n^{\pm 1} \in \langle S \rangle$ איבר כלשהו כאשר $s_1, \ldots, s_n \in S$. אזי

$$gs_1^{\pm 1}s_2^{\pm 1} \ldots s_n^{\pm 1} = s_1^{\pm 1}gs_2^{\pm 1} \ldots s_n^{\pm 1} = \cdots = s_1^{\pm 1} \ldots s_n^{\pm 1}g$$

כי $g$ מתחלף עם כל $s_i$ או $s_i^{-1}$. לכן $g \in C_G(\langle S \rangle)$ וקיבלנו $C_G(S) = C_G(\langle S \rangle)$.

ג. יש אינסוף תשובות אפשרויות כאן. כדי להבטיח $S \subsetneqq C_G(S)$ צריך לדאוג שכל איברי $S$ מתחלפים עם כל איברי $S$ (אם $S$ הייתה תת־חבורה היינו אומרים כי $S$ אבלית). נבחר $G = S_3$. אז אפשר לבחור $S = \{(123), (132)\}$. נשים לב כי $\langle S \rangle = \langle (123) \rangle$, וחישוב קצר יראה כי $C_G(S) = \langle (123) \rangle \neq S_3$. לכן $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$.

ד. גם כאן נבחר $G = S_3$. אפשר לבחור $S = \{(123), (12)\}$ או $S = S_3 \backslash \{\mathrm{id}\}$. במקרה זה $\langle S \rangle = G$. אז ראינו כי $C_G(S) = Z(G) = \{\mathrm{id}\}$. לכן $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$.

**שאלה 6.** נאמר שפעולה של חבורה $G$ על קבוצה $X$, כך ש-$|X| > 2$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

א. הוכיחו שאם $G$ פועלת 2-טרנזיטיבית על $X$ אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי $G$ פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם $G$ פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

ג. הוכיחו כי $S_4$ פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$.

ד. יהי $F$ שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית עליה.

פתרון.

א. לכל שני איברים $x, y \in X$ ניקח איבר $x \neq z \in X$ (קיים כזה לפי הדרישה על הגודל של $X$).
נתבונן בזוגות $x \neq y$ ו-$x \neq z$. מכיוון שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית יש $g \in G$ כך ש-$g * x = y$ (וגם $g * z = x$ אבל זה לא חשוב).

ב. יהיו $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ כלומר $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$. אם הפעולה של $G$ היא 2-טרנזיטיבית, אז קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ ו-$g * x_2 = y_2$. לכן

$$g * (x_1, x_2) = (g * x_1, g * x_2) = (y_1, y_2)$$

בכיוון השני, אם $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$, אז $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ וקיים $g \in G$ כך ש-$g * (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. כלומר $g * x_i = y_i$.

ג. נסמן $X = \{1, 2, 3, 4\}$. תהי $\sigma \in S_4$. הפעולה של $\sigma$ על $i \in X$ היא $\sigma * i = \sigma(i)$.
לכל $(i, j), (k, l) \in X \times X \setminus \Delta$ אם $|\{i, j, k, l\}| = 4$ (כלומר כולם שונים), נבחר $\sigma = (ik)(jl) \in S_4$ ואז

$$\sigma * (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j)) = (k, l)$$

אם $|\{i, j, k, l\}| = 3$ (כלומר יש בזוגות $(i, j), (k, l)$ איבר משותף אחד), אז בלי הגבלת הכלליות $i = k$ או $i = l$ וקיים $m \notin \{i, j, k, l\}$. אם $i = k$, נבחר את $\sigma = (jlm)$, ואם $i = l$ נבחר את $\sigma = (ikm)$.
לסיום, אם $|\{i, j, k, l\}| = 2$, אז יש שתי אפשרויות: או ש-$i = k, j = l$, ונבחר את $\sigma = \mathrm{id}$, או ש-$i = l, j = k$ ונבחר את $\sigma = (ij)(mm')$ עבור $m, m' \notin \{i, j, k, l\}$.
שימו לב שלכל $n \geq 4$ ניתן להרחיב הוכחה זו לכך ש-$S_n$ פועלת 2-טרנזיטיבית על $\{1, 2, \ldots, n\}$.

ד. בשביל טרנזיטיביות, מספיק להראות שיש וקטור שהמסלול שלו הוא כל $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. נראה זאת עבור הוקטור $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. יהי $v \in F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ וקטור כלשהו, ונשלים אותו לבסיס (אפשר, כי הוא לא אפסי) $\{v, w\}$.
ידוע ממשפט ההגדרה (מאלגברה לינארית) שקיימת העתקה לינארית שמעבירה את $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ל-$v$ ואת $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ל-$w$. מכיוון ש-$\{v, w\}$ הוא בסיס אז ההעתקה הזו היא הפיכה, ולכן המטריצה המייצגת שלה תהיה מ-$GL_2(F)$.
אגב, אפשר להראות שאפילו $SL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. נסו למצוא מטריצות מפורשות.
הפעולה היא לא 2-טרנזיטיבית, כי אי אפשר לשלוח שני וקטורים תלויים לינארית לשני וקטורים שאינם תלויים לינארית. למשל עבור $\alpha \neq 0, 1$ (קיים $\alpha$ כזה כי $|F| > 2$), נבחר את $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right)$ ואת $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$. אז אין מטריצה $A$ כך ש-$A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right)$ וגם $A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ שכן

$$A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \alpha \cdot A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

**שאלה 7.** תזכורת: דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ הוא שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של $V$.

א. הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$. בנוסף הראו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

ב. מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על $i$.

פתרון.

א. יהי $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ דגל ב-$\mathcal{B}$. לכל מרחב וקטורי $V_i$ בדגל ולכל $v \in V_i$, איבר היחידה $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ מקיים כי $I_n v = v$. לכן $I_n \cdot V_i = V_i$. אנחנו יודעים שכפל מטריצות (כאשר הגדלים מתאימים) הוא קיבוצי ולכן לכל $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ מתקיים $A_1(A_2 v) = (A_1 A_2) v$. לכן גם $A_1(A_2 \cdot V_i) = (A_1 A_2) \cdot V_i$. לכן

$$\begin{aligned}
A_1 * (A_2 * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)) &= A_1 * (A_2 \cdot V_0 \subset A_2 \cdot V_1 \subset \cdots \subset A_2 \cdot V_n) \\
&= A_1(A_2 \cdot V_0) \subset A_1(A_2 \cdot V_1) \subset \cdots \subset A_1(A_2 \cdot V_n) \\
&= (A_1 A_2) \cdot V_0 \subset (A_1 A_2) \cdot V_1 \subset \cdots \subset (A_1 A_2) \cdot V_n \\
&= (A_1 A_2) * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)
\end{aligned}$$

וקיבלנו שאכן מדובר בפעולת חבורה על קבוצה. נותר להראות שהפעולה טרנזיטיבית. נסמן ב-$F_e$ את הדגל הסטנדרטי

$$\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

מספיק להראות שלכל דגל $F \in \mathcal{B}$ יש $A \in GL_n(\mathbb{R})$ השולחת את $F_e$ אל $F$ (זה נכון לכל פעולה של חבורה, שאם ישנו איבר שהמסלול שלו הוא כל הקבוצה, אז המסלול של כל איבר הוא כל הקבוצה). יהי דגל

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

ב-$\mathcal{B}$ כך שלמרחב $V_1$ יש בסיס $\{b_1\}$ של וקטור עמודה, שאותו נשלים לבסיס $\{b_1, b_2\}$ של $V_2$, וכן הלאה באינדוקציה עד שנקבל בסיס $\{b_1, \dots, b_n\}$ של $V$. הרי לפי הגדרה $\dim V_i = i$ ואנחנו יודעים שאפשר להשלים קבוצה בלתי תלויה לינארית של $i-1$ וקטורים ב-$V_i$ לבסיס בן $i$ איברים. המטריצה $A$ המבוקשת היא מטריצת מעבר בין הבסיס הסטנדרטי לבסיס $\{b_1, \dots, b_n\}$. באופן מפורש

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ונקבל $A \cdot \langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle b_1, \dots, b_i \rangle = V_i$ לכל $i$.

ב. תהי $A \in \mathrm{stab}(F_e)$. לכן $A \cdot \langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ לכל $i$. הדרישה $A \cdot \langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ משמעה שהעמודה הראשונה של $A$ היא $(r_1, 0, \dots, 0)$ עבור $r_1 \in \mathbb{R}^*$ (למה $r_1 \neq 0$? כי $A$ הפיכה). כעת מהדרישה $A \cdot \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ נקבל שהעמודה השנייה של $A$ היא מן הצורה $(r_2', r_2, 0, \dots, 0)$ עבור $r_2 \in \mathbb{R}^*$ ו-$r_2' \in \mathbb{R}$. מכאן ברור שצריך להמשיך באינדוקציה על $n$, המימד של $V$.
נוכיח באינדוקציה על $n$ ש-$\mathrm{stab}(F_e)$ הוא תת־החבורה של המטריצות המשולשיות העליונות ההפיכות. בסיס האינדוקציה עשינו לעיל. נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$. כלומר לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $A \cdot V_i = V_i$. נשאר להוכיח $A \cdot V_n = V_n$. ניתן להניח כי

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} r_1 & * & * & * & a_1 \\ 0 & r_2 & * & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{i-1} & a_{n-1} \\ \hline b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & r_n \end{array}\right)$$

כאשר $r_i \in \mathbb{R}^*$, $* \in \mathbb{R}$ לפי הנחת האינדוקציה, ואנו נדרשים למצוא את איברי השורה והעמודה האחרונות. אם $b_i \neq 0$ נקבל סתירה לכך ש-$A \cdot \langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$, כי באגף שמאל נוכל למצוא וקטור שבצירוף לינארי בבסיס הסטנדרטי יש ל-$e_n$ מקדם $b_i$, ואז הוא לא שייך לאגף ימין. לכן $b_i = 0$ לכל $i$, וכדי להבטיח ש-$A$ הפיכה נדרוש $r_n \in \mathbb{R}^*$. עבור כל $1 \leq i \leq n-1$ אין שום מגבלה על $a_i$, שכן אם $v \in V_n$, אז $Av \in \mathbb{R}^n = V_n$, ואם $v \in V_j$ עבור $j < n$, אז $Av \in V_j$ כי בפיתוח המכפלה $Av$ נקבל כי $n-j$ האיברים התחתונים הם $0$ (כלומר $a_{n-j}, \dots, a_n$ לא משפיעים כאן כלל). ביתר פירוט: אם $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j$, אז אפשר לבדוק לכל מחובר $A\alpha_i e_i \in V_j$ בנפרד. מכאן ש-$A$ מטריצה משולשית עליונה והפיכה, כדרוש.

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

**שאלה 8.** כהמשך לתוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, הוסיפו לה פונקציה המחשבת את גודל מחלקת הצמידות של תמורה ב-$S_n$, ופונקציה המחשבת את סדר המְרַכֵּז שלה.

**שאלה 9.** יהי $\Psi \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

א. הוכיחו שאם $\Psi$ מקיים את שני התנאים:

- לכל $A, B \in \mathcal{L}$, אם $A \leq B$ אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$.

- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi^3 = \Psi$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

ב. הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!