תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}\!/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}\!/_{H_n}$.

ג. רשות: תהינה G, H חבורות. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G \times H) \cong \operatorname{Inn}(G) \times \operatorname{Inn}(H)$.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}\!/_{H} \times {}^{G}\!/_{K}$.

שאלה 3 (משפט האיזומורפיזם השלישי)**.** תהי G חבורה, תהינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H \subseteq K \subseteq G$, אז

$$(G/H) \,/\, (K/H) \cong G/K$$

הוכיחו את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי ההדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H \lhd K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f\colon {}^{G}\!/_{H} \to {}^{G}\!/_{K}$ לפי $f(gH) = gK$.

א. הוכיחו ש-f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1 H = g_2 H$, אז $f(g_1 H) = f(g_2 H)$.

ב. הוכיחו ש-f הומומורפיזם.

ג. הוכיחו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = {}^{K}\!/_{H}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 4. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר תת־קבוצה שלה

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\,, (1\ 3)\,(2\ 4)\,, (1\ 4)\,(2\ 3)\}$$

שנקראת חבורת הארבעה של קליין.

א. הוכיחו כי $V \lhd S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת־חבורות

$$\{\mathrm{id}\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$$

כך שלכל i מתקיים $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל i המנה ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ היא חבורה ציקלית. רמז: העזרו בסעיף הקודם ובתת־חבורה נורמלית מוכרת אחרת של S_4.

שאלה 5. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1 ולחבורה לא אבלית G_2, שיש להן תת־חבורות נורמליות $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$, כך שמתקיים $H_1 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$. רמז: אפשר למצוא דוגמאות כאלו כבר לחבורות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^2 עבור p ראשוני.

שאלה 6. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2019} = x^{2019}y^{2019}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$A = \left\{g^{2019} \,\middle|\, g \in G\right\}$$
$$B = \left\{g^{2018} \,\middle|\, g \in G\right\}$$
$$C = \left\{g \,\middle|\, g \in G, g^{2019} = e\right\}$$

א. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות. רמז: כדאי לא לעבוד קשה ולהעזר בהומומורפיזמים.

ב. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x, y \in G$ מתקיים $x^{2019}y^{2018} = y^{2018}x^{2019}$.

ג. הוכיחו שלכל $g, h \in G$ מתקיים $\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2019\cdot 2018} = e$.

בהצלחה!