מבוא לאלגברה לינארית
תרגיל 7 - פתרון

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 9\cdot 7 = -60$$

ב. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 14 & 5 & -16 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 14 & 5 & -16 \end{vmatrix} \underset{=}{R_3 - 7R_1 \to R_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ג. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \to R_1 \\ R_2 - 5R_3 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

ד. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_2 + 2R_1 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 16 & 11 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 + 10R_3 \to R_2 \\ R_4 + 2R_3 \to R_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -64 & -39 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -16 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -64 & -39 \\ -1 & -8 & -5 \\ 0 & -16 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -64 & -39 \\ -16 & -9 \end{vmatrix} = -48$$

ה. $A_5=\begin{pmatrix}3&-1&-4&2\\2&3&-2&-4\\2&-1&-3&2\\1&2&-1&-3\end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix}3&-1&-4&2\\2&3&-2&-4\\2&-1&-3&2\\1&2&-1&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1-3R_4\to R_1\\R_2-2R_4\to R_2\\R_3-2R_4\to R_3\\=\end{matrix}\begin{vmatrix}0&-7&-1&11\\0&-1&0&2\\0&-5&-1&8\\1&2&-1&-3\end{vmatrix}=$$

$$=-1\begin{vmatrix}-7&-1&11\\-1&0&2\\-5&-1&8\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1-7R_2\to R_1\\R_3-5R_2\to R_3\\=\end{matrix}\quad(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&-1&-3\\-1&0&2\\0&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1&-3\\-1&-2\end{vmatrix}=-1\left(2-3\right)=1$$

2. קבעו לגבי כל אחת מהמטריצות A_i , $1\le i\le 5$ משאלה 1 האם היא הפיכה.

תשובה: כל המטריצות משאלה 1 הפיכות חוץ מ- A_2 , כי $\det\left(A_2\right)=0$

3. האם למערכת $A_i\vec{x}=\vec{0}$, $1\le i\le 5$, כאשר A_i מטריצה משאלה 1 ו- $\vec{x}$ וקטור בגודל מתאים, יש פתרון לא טריוויאלי?

תשובה: רק למערכת $A_2\vec{x}=\vec{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי, כי A_2 לא הפיכה.

4. על ידי שימוש בדטרמיננטה מצאו עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות אינן הפיכות:

א. $A=\begin{pmatrix}1&x&2\\2&1&1\\x&1&1\end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix}1&x&2\\2&1&1\\x&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2-R_3\to R_3\\=\end{matrix}\begin{vmatrix}1&x&2\\2&1&1\\x-2&0&0\end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix}x&2\\1&1\end{vmatrix}=(x-2)(x-2)$$

המטריצה A אינה הפיכה אם $\det A=0$, ז"א אם $x=2$.

ב. $A=\begin{pmatrix}0 & x & 2\\ 2 & 1 & 0\\ x & 1 & -1\end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix}0 & x & 2\\ 2 & 1 & 0\\ x & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}x & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}x & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2(-x-2)-2x=$$
$$=2x+4-2x=4$$

$\Leftarrow$ המטריצה A הפיכה לכל x.

5. עבור אילו ערכי k למערכות הבאות יש פתרון יחיד?

א. $\begin{pmatrix}1 & k & 2\\ 2 & 1 & 2\\ k & 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, כאשר a,b,c קבועים כלשהם.

פתרון:

למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם מטריצת המקדמים $A=\begin{pmatrix}1 & k & 2\\ 2 & 1 & 2\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$

הפיכה ולכן מספיק לבדוק עבור אילו ערכי k $\det A\neq 0$.

$$\begin{vmatrix}1 & k & 2\\ 2 & 1 & 2\\ k & 1 & k\end{vmatrix}\ C_1-C_3\to C_1\ \begin{vmatrix}-1 & k-1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & k\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & k\end{vmatrix}=-(k-2)$$

המטריצה A הפיכה לכל $k\neq 2$.

<u>הערה:</u> C_i מסמל עמודה i-ית.

ב. $\begin{pmatrix}(k-2) & 2 & 3 & 4\\ 2 & (k-2) & 3 & 4\\ 3 & 2 & (k-2) & 4\\ 4 & 2 & 3 & (k-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$,

כאשר a,b,c,d קבועים כלשהם.

פתרון:

למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם מטריצת המקדמים

$$A=\begin{pmatrix}(k-2) & 2 & 3 & 4\\ 2 & (k-2) & 3 & 4\\ 3 & 2 & (k-2) & 4\\ 4 & 2 & 3 & (k-2)\end{pmatrix}$$ הפיכה

ולכן מספיק לבדוק עבור אילו ערכי k $\det A\neq 0$.

$$\begin{vmatrix}(k-2) & 2 & 3 & 4\\ 2 & (k-2) & 3 & 4\\ 3 & 2 & (k-2) & 4\\ 4 & 2 & 3 & (k-2)\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1-R_2\to R_1\\ R_2-R_4\to R_2\\ R_3-R_4\to R_3\end{matrix}\begin{vmatrix}k-4 & 4-k & 0 & 0\\ -2 & k-4 & 0 & 6-k\\ -1 & 0 & k-5 & 6-k\\ 4 & 2 & 3 & k-2\end{vmatrix}$$

$$(k-4)\begin{vmatrix}k-4 & 0 & 6-k\\ 0 & k-5 & 6-k\\ 2 & 3 & k-2\end{vmatrix}+(k-4)\begin{vmatrix}-2 & 0 & 6-k\\ -1 & k-5 & 6-k\\ 4 & 3 & k-2\end{vmatrix}=$$

$$(k-4)\left[(k-4)\begin{vmatrix}x-5 & 6-k\\ 3 & k-2\end{vmatrix}+(6-k)\begin{vmatrix}0 & k-5\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right]+$$

$$(k-4)\left[-2\begin{vmatrix}k-5 & 6-k\\ 3 & k-2\end{vmatrix}+(6-k)\begin{vmatrix}-1 & k-5\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right]=$$

$$(k-4)\left[-(6-k)\begin{vmatrix}k-5 & 6-k\\ 3 & k-2\end{vmatrix}+(6-k)\begin{vmatrix}0 & k-5\\ 2 & 3\end{vmatrix}+(6-k)\begin{vmatrix}-1 & k-5\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right]=$$

$$(k-4)(6-k)\left[\underbrace{-\begin{vmatrix}k-5 & 6-k\\ 3 & k-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & k-5\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & k-5\\ 4 & 3\end{vmatrix}}_{-k^2-2k+35}\right]=$$

$$(k-4)(6-k)\left(-k^2-2k+35\right)$$

המטריצה A הפיכה אם $\det A\neq 0$, ז"א אם:

$$(k-4)(6-k)\left(-k^2-2k+35\right)\neq 0$$

$$k_1\neq 4\,,\,k_2\neq 6$$

$$k_3\neq 5\,,\,k_4\neq -7$$

ולכן לכל $k\neq 4,5,6,-7$ למערכת הנ"ל פתרון יחיד.