בדידה קיץ תש"ף - תרגול 1

13 ביולי 2020

1 הקדמה

אריאל ויצמן, $relweiz@gmail.com$.

ציון מורכב ממבחן סופי, בוחן ותרגילי בית (אחוזים לא ידועים כרגע).

דרך פתרון שיעורי בית: קודם כל על דף, באופן המסורתי, ואח"כ להעלות את הפתרון למערכת.

2 לוגיקה

2.1 אטומים וקשרים

בהינתן אטומים A, B נגדיר את טבלאות האמת הבאות:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$		
0	0	0	0	1	1		
0	1	1	0	1	0		
1	0	1	0	0	0		
1	1	1	1	1	1		

.

אלו פסוקים המורכבים משני אטומים. נשים לב גם לטבלה:

A	$\neg A$
0	1
1	0

2.1.1 פסוקים מורכבים

פסוקים יכולים להיות מורכבים יותר מאשר שני אטומים וקשר ביניהם. באופן כללי, בהינתן פסוקים p, q אזי הבאים: $p \wedge q, p \vee q, p \to q, \neg p$ פסוקים. למשל נוכל להגדיר את הפסוק "אם ורק אם" באופן הבא: עבור p, q פסוקים

$$p \leftrightarrow q := (p \to q) \wedge (q \to p)$$

הקשר "קסור" (מסומן $\oplus$) הוא מקבל אמת כאשר בדיוק אחד מחלקי הפסוק הינו אמת, ושקר אחרת.

2.1.2 הצרנה

הצרנה היא המעבר ממשפט עם מילים למשפט מתמטי. הרווח הוא קיצור, שעוזר להתמודד עם טענות מורכבות. לדוגמא, הצרינו:

1. "אם יש בגרות בשעה חופפת לקורס אז הקורס מתבטל".
פתרון: נסמן ב־ A את האטום "יש בגרות בשעה חופפת לקורס", וב־B את האטום הקורס מתבטל. המשפט אומר: $A \to B$.

2. "למדתי היטב למבחן ואף על פי כן נכשלתי בו".
פתרון: נסמן ב־ A את האטום "למדתי היטב למבחן", וב־ B את "נכשלתי במבחן". המשפט אומר: $A \land B$.

2.2 טאוטולוגיות

טאוטולוגיה הוא משפט שנכון ללא תלות בערכי הפסוקים שמהם הוא מורכב. למשל, "אם יורד גשם אז יורד גשם".

שני פסוקים A, B ייקראו שקולים אם הפסוק $A \leftrightarrow B$ הינו טאוטולוגיה. במקרה כזה, אם נבנה להם טבלת אמת נקבל שיש להם בדיוק אותה טבלה.

הוכיחו שהבאים שקולים:

1. $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$.

פתרון:

A	B	C	$B \lor C$	$A \land (B \lor C)$	$A \land B$	$A \land C$	$(A \land B) \lor (A \land C)$	
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**	
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**	
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**	
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**	
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**	
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**	
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**	
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**	

2. ראיתם בהרצאה שמתקיים:

(א) $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$.

(ב) $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$.

(ג) $A \to B \equiv \neg A \lor B$.

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) $A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$

פתרון:

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$A \to B$	$A \to C$	$(A \to B) \wedge (A \to C)$	
0	0	0	0	**1**	1	1	**1**	
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**	
0	1	0	0	**1**	1	1	**1**	
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**	
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**	
1	0	1	0	**0**	0	1	**0**	
1	1	0	0	**0**	1	0	**0**	
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**	

4. הוכיחו שניתן לבטא את "או" ו"וגם" באמצעות שלילה וגרירה בלבד.
פתרון: $A \vee B \equiv \neg A \to B$. ובנוסף, $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \to \neg B)$.

5. האם המשפטים הבאים שקולים:

(א) אם אייל שמח אז ענת גבוהה, ואם ענת לא גבוהה אז אייל לא שמח.

(ב) אייל שמח אם ורק אם ענת גבוהה.

פתרון: זהירות: בטח ראיתם את השקילות $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$, ולכן המשפט הראשון הוא $(A \to B) \wedge (\neg B \to \neg A) \equiv A \to B$ (כי באופן כללי, עבור פסוק p מתקיים $p \wedge p \equiv p$), ומשפט זה כמובן לא שקול ל־ $A \leftrightarrow B$ שהרי עבור $A = 0, B = 1$ נקבל בראשון אמת ובשני שקר.

2.2.1 טענת גרירה

"טענות גרירה" הן טענות שטוענות שהפסוק "אם A אז B" נכונות. לעיתים לשם נוחות מסמנים זאת באופן הבא: $A \Rightarrow B$, כלומר, $A \to B \equiv T$. כשניגשים לטענות מסוג זה ישנן שתי אופציות:

1. אם הטענה נכונה, אז צריך להוכיח שאכן $A \to B$ אמת. כיצד נעשה זאת? כיון שכאשר A שקר אז בוודאי הטענה נכונה, חבל לבזבז על זה את הזמן, וניגשים ישר לשלב בו A אמת. בפועל: נניח A אמת, צ"ל: B אמת.

2. אם הטענה לא נכונה, אנחנו צריכים להראות שיש מקרה בו הגרירה $A \to B$ מקבלת ערך שקר, וזה קורה כאשר A אמת ו־B שקר. לכן בפועל: צריך למצוא מצב כזה בו: $A = T \wedge B = F$.

תרגילים:

1. האם משני הנתונים נובעת המסקנה:

(א) נתון 1: אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר.

(ב) נתון 2: אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

(ג) מסקנה: אם אני לא מנגן בפסנתר אז אני מנגן בתופים.

פתרון: לא. תלוי מי הוא "אני", אם "אני" לא מנגן בכלום (כלומר השורה המתאימה ל F, F, F בטבלת אמת של אטומים "מנגן בפסנתר", "מנגן בחצוצרה", מנגן בתופים"), אז מתקיים: שני הנתונים אכן נכונים: (א) נכון כי אני לא מנגן בחצוצרה ואז כל הבא אחריו נכון. (ב) נכון כי אני באמת לא מנגן בשניהם. אך המקנה לא נכונה: אני אמנם לא מנגן בפסנתר אך גם לא בתופים.

2. האם משני הנתונים נובעת המסקנה:

(א) נתון 1: אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר.

(ב) נתון 2: אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

(ג) מסקנה: אם אני מנגן בפסנתר אז אני לא מנגן בתופים.

פתרון: נכון, ללא תלות במי הוא "אני". הוכחה: נניח שהנתונים נכונים, צריך להוכיח את המסקנה. המסקנה בעצמה היא טענת גרירה, אז שוב נניח (בנוסף לנתונים) שאני אכן מנגן בפסנתר. נשים לב שנתון 2 שקול לכך שאם אני מנגן בפסנתר אז אני מנגן בחצוצרה. וכיון שהוספנו את הנתון שמנגן בפסנתר אז מקבלים שאני מנגן בחצוצרה. וכעת, מנתון 1 נקבל שאני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד. כלומר, לפי דה־מורגן, אני לא מנגן בתופים או אני לא מנגן בפסנתר. אבל נתון שאני מנגן בפסנתר, לכן מתחייב שאני לא מנגן בתופים. מש"ל.

2.2.2 הכרחי ומספיק

טרמינולוגיה: לעיתים, במקום להגיד "אם A אז B" אומרים את אחד מהבאים:

1. A תנאי מספיק ל־B.

2. B תנאי הכרחי ל־A.

"הכרחי ומספיק" הכוונה ל"אם ורק אם".

תרגילים: השלימו:

1. כדי לזכות בלוטו **הכרחי** למלא כרטיס לוטו. (לכן אם נסמן A זכייה בלוטו, B מילוי כרטיס אז הטענה היא שמתקיים: $A \to B$).

2. כדי שיהיה שקט בכיתה **מספיק** ללחוץ mute all.

3. לקבל בקורס ציון עם 3 ספרות **הכרחי ומספיק** לקבל 100 בקורס.

2.3 פרדיקטים וכמתים

עד עכשיו דיברנו על אטומים שהם אמת או שקר, אך לא שניהם. פרדיקט הוא פונקציה שמחזירה אמת או שקר. למשל יש את הפפרדיקט $P(n)$ שמביע אם n הוא ראשוני. ישנם פרדיקטים דו־מקומיים, שמקבלים שני משתנים. למשל, הפרדיקט $S(x,y)$ המביע $x<y$.

ניתן גם להשתמש בקשרים. למשל להגדיר $R(x,y) := (x \neq 0) \wedge (x \geq y)$.

כשיש פרדיקטים אנחנו חשוב לשים לב לכמתים. הכמת $\forall$: לכל, $\exists$: קיים.

תרגיל: נגדיר פרדיקט $R(x,z,y)$ המביע $x<z<y$. האם הפסוק הבא אימית?:

$$\forall x \forall y \exists z : (x<y) \rightarrow R(x,z,y)$$

פתרון: תלוי מאיפה באים המשתנים. אם למשל הם שלמים אז זה לא נכון, כי עבור $x=1, y=2$ לא קיים z כנדרש. אמת הדבר, שאם המשתנים רציונאליים או ממשיים אז המשפט הנכון. ראינו שחשוב לדעת מאיפה המשתנים באים.

לא חשוב שמות האותיות. כלומר הפסוקים הבאים שקולים:

$$\forall x \forall y \exists z : R(x,z,y) \equiv \forall a \forall t \exists g : R(a,g,t)$$

עוד דבר חשוב הוא הסדר:

א. הסדר בין הכמתים:

$$\forall x \forall y \exists z : (x<y) \rightarrow R(x,z,y) \not\equiv \forall x \exists z \forall y : (x<y) \rightarrow R(x,z,y)$$

ב. הסדר בתוך הפרדיקט: למשל עבור משתנים מהטבעיים:

$$\forall x \forall y \exists z : (x<y) \rightarrow R(x,z,y) \not\equiv \forall x \forall y \exists z : (x<y) \rightarrow R(x,y,z)$$

2.3.1 שלילת פסוקים

נגדיר את שלילת הכמתים:

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$