<u>מתמטיקה בדידה – תרגיל 4</u>

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1=\{(a,b)\big|a,b\in\mathbb{N},a<b\}$

ב. $R_2=\{(a,b)\big|a,b\in\mathbb{N},a\le b\}$

ג. $R_3=\{(a,b)\big|a,b\in\mathbb{N},a=b\}$

תשובה:

R_1 הוא טרנזיטיבי, לא רפלקסיבי ולא סימטרי. [צריך לתת דוגמא איפה שרושמים לא. טרנזיטיבי רצוי הסבר קצר]

R_2 הוא טרנזיטיבי, רפלקסיבי ולא סימטרי.

R_3 יחס שקילות (דהיינו הכל). מחלקות השקילות שלו הן המספרים הטבעיים.

2. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x-y|<1\Leftrightarrow xRy$

ב. $x-y<1\Leftrightarrow xSy$

ג. $x-y<-1\Leftrightarrow xTy$

תשובה:

R איננו יחס שקילות משום שאינו טרנזיטיבי, למשל $1R1.7$ וגם $1.7R2.4$ אך $1\not R2.4$.

S איננו יחס שקילות משום שאינו סימטרי, למשל $1S7$ אך $7\not S1$.

T איננו יחס שקילות משום שאינו סימטרי, למשל $1T7$ אך $7\not T1$.

3. יהיו $T\subseteq C\times B$, $W\subseteq B\times C$, $S\subseteq B\times C$, $V\subseteq A\times B$, $R\subseteq A\times B$ הוכח כי:

א. $(R\subseteq V)\wedge(S\subseteq W)\Rightarrow S\circ R\subseteq W\circ V$.

ב. $(S\cup W)\circ R=(S\circ R)\cup(W\circ R)$.

ג. הוכח ע"י דוגמא נגדית שהטענה $(S\cap W)\circ R=(S\circ R)\cap(W\circ R)$ אינה נכונה.

תשובה:

[הגדרה: $S\circ R=\{(a,c):\exists_{b\in B}(a,b)\in R\wedge(b,c)\in S\}$]

יהי $(a,c)\in S\circ R$ **אזי קיים** $b\in B$ **כך ש** $(a,b)\in R$ **וגם** $(b,c)\in S$. **בגלל ההכלות** $S\subseteq W$ **ו** $R\subseteq V$, $(a,b)\in V$ **וגם** $(b,c)\in W$ **ולכן** $(a,c)\in W\circ V$.

$(a,c)\in(S\cup W)\circ R$ **אם ורק אם קיים** $b\in B$ **כך ש** $(a,b)\in R$ **וגם** $(b,c)\in S\cup W$. **זה קורה אם ורק אם** $(a,b)\in R\wedge((b,c)\in S\vee(b,c)\in W)$. **זה קורה אם ורק אם** $((a,b)\in R\wedge(b,c)\in S)\vee((a,b)\in R\wedge(b,c)\in W)$. **זה קורה אם ורק אם** $(a,c)\in S\circ R$ **או** $(a,c)\in W\circ R$, **וזה אם ורק אם** $(a,c)\in(S\circ R)\cup(W\circ R)$.

ניקח למשל $A=B=C=\{1,2\}$, $R=\{(1,1),(1,2)\}$, $S=\{(1,2)\}$ **ו** $W=\{(2,2)\}$. $S\circ R=\{(1,2)\}=W\circ R$ **ולכן** $(S\circ R)\cap(W\circ R)=\{(1,2)\}$. **אולם** $S\cap W=\phi$ **ולכן** $(S\cap W)\circ R=\phi$.

4. יהי E יחס שקילות על קבוצה A, ויהי F יחס שקילות על קבוצה B. תהי $G=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2))\mid (a_1,a_2)\in E,(b_1,b_2)\in F\}$.
הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A\times B$.

תשובה:
רפלקסיביות: $((a,b),(a,b))\in G$ בגלל ש $(a,a)\in E$ (כי E יחס שקילות) וגם $(b,b)\in F$ (כי F יחס שקילות).
סימטריות: נניח $((a,b),(c,d))\in G$, אזי $(a,c)\in E$ וגם $(b,d)\in F$. בגלל סימטריות של E ו F מתקיים $(c,a)\in E$ וגם $(d,b)\in F$, ולכן $((c,d),(a,b))\in G$.
טרנזיטיביות: נניח $((a,b),(c,d))\in G$ וגם $((c,d),(e,f))\in G$. מהנתון הראשון מקבלים $(a,c)\in E$ וגם $(b,d)\in F$ ומהנתון השני מקבלים $(c,e)\in E$ וגם $(d,f)\in F$. בגלל הטרנזיטיביות של E ו F מתקיים $(a,e)\in E$ וגם $(b,f)\in F$, ולכן $((a,b),(e,f))\in G$.

5. A קבוצה.יהיו S ו-R יחסי שקילות על A. הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:
א. $R\cup S$ יחס שקילות.
ב. $(A\times A)\setminus R$ יחס שקילות.
ג. $(A\times A)\setminus R\cup I_A$ יחס שקילות.
ד. $R\setminus S$ יחס שקילות.
ה. $R\circ R$ יחס שקילות.
ו. $R\circ S$ יחס שקילות.
(I_A זהו יחס הזהות, לדוגמא אם $A=\{1,2,3\}$ אז $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$)

תשובה:
$R\cup S$ איננו בהכרח יחס שקילות. קחו למשל $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ ו $S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$. במקרה זה $R\cup S$ איננו טרנזיטיבי משום ש $(1,2)\in R\cup S$ וגם $(2,3)\in R\cup S$ אך $(1,3)\notin R\cup S$.
$(A\times A)\setminus R$ תמיד איננו יחס שקילות, משום שהוא אנטי-רפלקסיבי (כל איבר לא מתייחס לעצמו).
$(A\times A)\setminus R\cup I_A$ איננו בהכרח יחס שקילות משום שאיננו בהכרח טרנזיטיבי. קחו למשל $A=\{1,2,3\}$ ו $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. במקרה זה $(1,3)\in(A\times A)\setminus R\cup I_A$ וגם $(3,2)\in(A\times A)\setminus R\cup I_A$ אבל $(1,2)\notin(A\times A)\setminus R\cup I_A$.
$R\setminus S$ איננו יחס שקילות משום שהוא אנטי רפלקסיבי.
$R\circ R=R$ ולכן הוא יחס שקילות.
$R\circ S$ איננו בהכרח יחס שקילות משום שאיננו בהכרח סימטרי. קחו למשל $A=\{1,2,3\}$, $S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ ו $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$. $(1,3)\in R\circ S$ אך $(3,1)\notin R\circ S$.

6. תהי A קבוצה סופיות כך ש- $|A|=9$.
א. כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A ?
ב. כמה יחסי שקילות מעל A מקיימים את התנאי הבא: "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3 איברים בדיוק" ? (רמז: חשבו על הקשר בין יחסי שקילות לחלוקות.)

תשובה: יחס הוא פשוט תת-קבוצה של $A\times A$. קבוצת תת-הקבוצות האלה היא $P(A\times A)$ וגודלה הוא $2^{|A|^2}=2^{81}$.
כל יחס שקילות משרה חלוקה של A. נקרא למחלקות השקילות כרגע בשמות א, ב וג. בוחרים איבר ראשון למחלקה א (יש 9 אפשרויות), בוחרים איבר שני (8 אפשרויות) ואיבר שלישי (7 אפשרויות). כל שלשה קיבלנו ב6 צורות שונות, ולכן צריך לחלק את התוצאה ב6. כעת, נבחר איבר ראשון למחלקה ב (6 אפשרויות), איבר שני (5 אפשרויות) ואיבר שלישי (4 אפשרויות). שוב נחלק את התוצאה ב6. שלושת האיברים שנותרו חייבים להיות שייכים למחלקה ג. עכשיו, מכיוון שגם סדר המחלקות לא משנה (אפשר לקבל את אותן מחלקות פעם כא,ב וג ופעם כג, א וב וכיוצא באילך), צריך לחלק את התוצאה שוב ב6.

סה"כ קיבלנו $280 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6}$.

<u>בהצלחה!</u>