לינארית 2 תרגיל 3

שאלה 1

יהי V מרחב המטריצות מסדר 2×2 מעל C. תהי $T: V\to V$ נתונה ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & a \end{pmatrix}$$

א. מצא בסיס לתמונה של T.

ב. מצא בסיס לגרעין של T.

ג. האם $V = \mathrm{Im}(T)\oplus \mathrm{Ker}(T)$? נמק.

ד. מצא מטריצה לא הפיכה, שאינה מטריצת האפס, הנמצאת בתמונה של T.

ה. האם המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ נמצאת בתמונה של T ? אם כן מצא את קבוצת כל המקורות של מטריצה זו, וקבע אם קבוצה זו מהווה תת-מרחב וקטורי של V; אם לא הסבר מדוע.

שאלה 2

הוכיחו שהטרנספורמציות הבאות הינן לינאריות. מצאו מהם הגרעין והתמונה שלהן וכן בסיס ומימד של הגרעין והתמונה. האם ההעתקה הנתונה היא על? חח"ע? הפיכה?

א. $T(x) = Ax$ $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ כאשר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & -5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$.

ב. $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

שאלה 3

א. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, המוגדרת ע"י: $T(x,y) = (2x-3y, \alpha x+\beta y)$ ומקיימת את התנאי: $KerT = \mathrm{Im}\,T$. מצאו (אם קיימים) את הערכים של α, β.

ב. האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_4[x]$ כך ש- $KerT = \mathrm{Im}\,T$? נמקו היטב.

<u>תזכורת</u>: $\mathbb{R}_4[x]$ הוא מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים ממעלה ≥ 4.

שאלה 4

$T:\mathbb{R}_9[x]\to\mathbb{R}_9[x]$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $\mathrm{null}\,T\cdot \mathrm{rank}\,T = 16$ וגם $\mathrm{Ker}\,T\subseteq \mathrm{Im}\,T$. חשבו את הערכים האפשריים של $\mathrm{null}\,T$ ו $\mathrm{rank}\,T$.

<u>הערה</u>: $\mathrm{null}\,T$ הוא סימון מקובל ל $\dim \mathrm{Ker}\,T$. $\mathrm{rank}\,T$ הוא סימון מקובל ל $\dim \mathrm{Im}\,T$.

השאלה הבאה (שאלה 5) מופיעה הרבה במבחנים (שאלות בסגנון שלה) אז נא לנסות קצת לשבור את הראש...

שאלה 5

יהי V מ"ו בעל ממד 3 ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^3=0$.
נניח כי קיים וקטור $v\in V$ כך ש-$T^2(v)\neq 0$.

א. הוכיחו כי הקבוצה $B=\{v,T(v),T^2(v)\}$ היא בסיס של V.

ב. הוכיחו כי $KerT\subset \operatorname{Im}T$ (כלומר $KerT\subsetneq \operatorname{Im}T$).

שאלה 6

יהי V מ"ו בעל ממד סופי ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Im}T^2\subseteq \operatorname{Im}T$ וגם $Ker\,T\subseteq Ker\,T^2$.

ב. הוכיחו כי שני התנאים הבאים שקולים:

$$(1)\quad \operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$$
$$(2)\quad Ker\,T=Ker\,T^2$$

(כלומר עליכם להוכיח ש(1) נכון אם ורק אם (2) נכון).

ג. הוכיחו כי אם אחד מהתנאים של סעיף ב' מתקיים, אזי: $\operatorname{Im}T\oplus Ker\,T=V$.