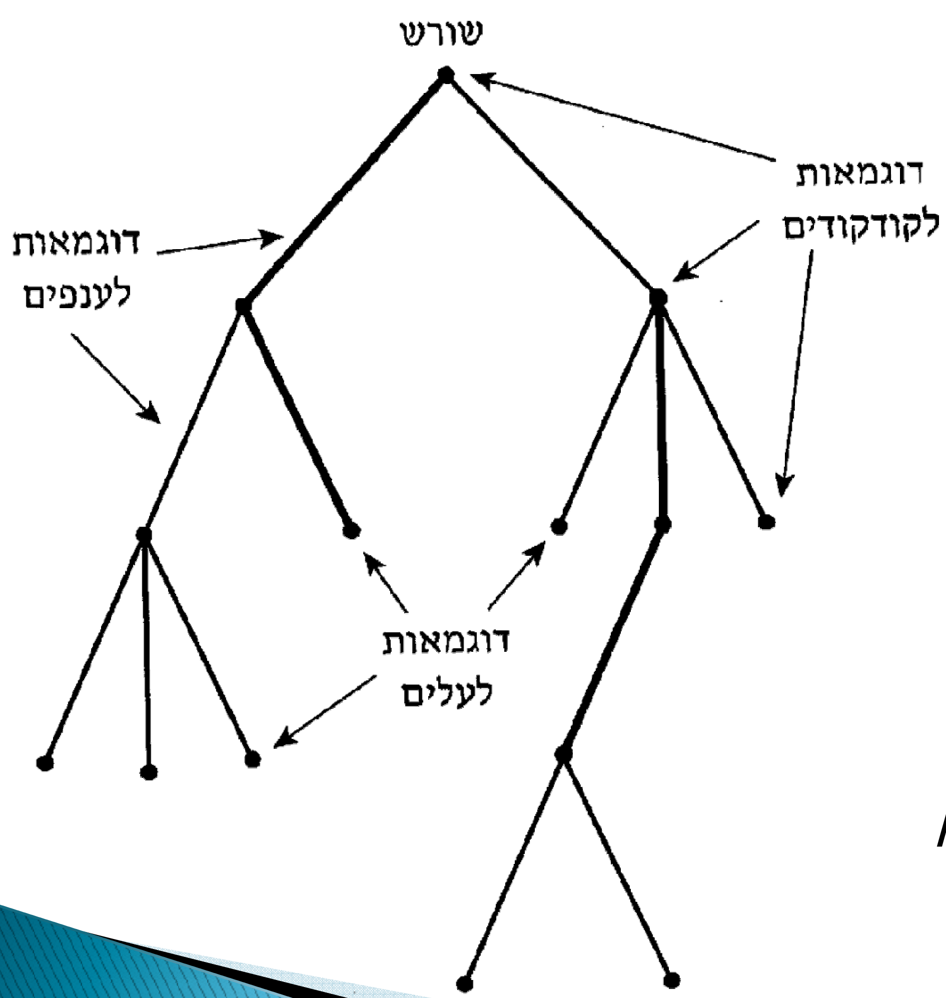
תורת המשחקים – שיעור 10

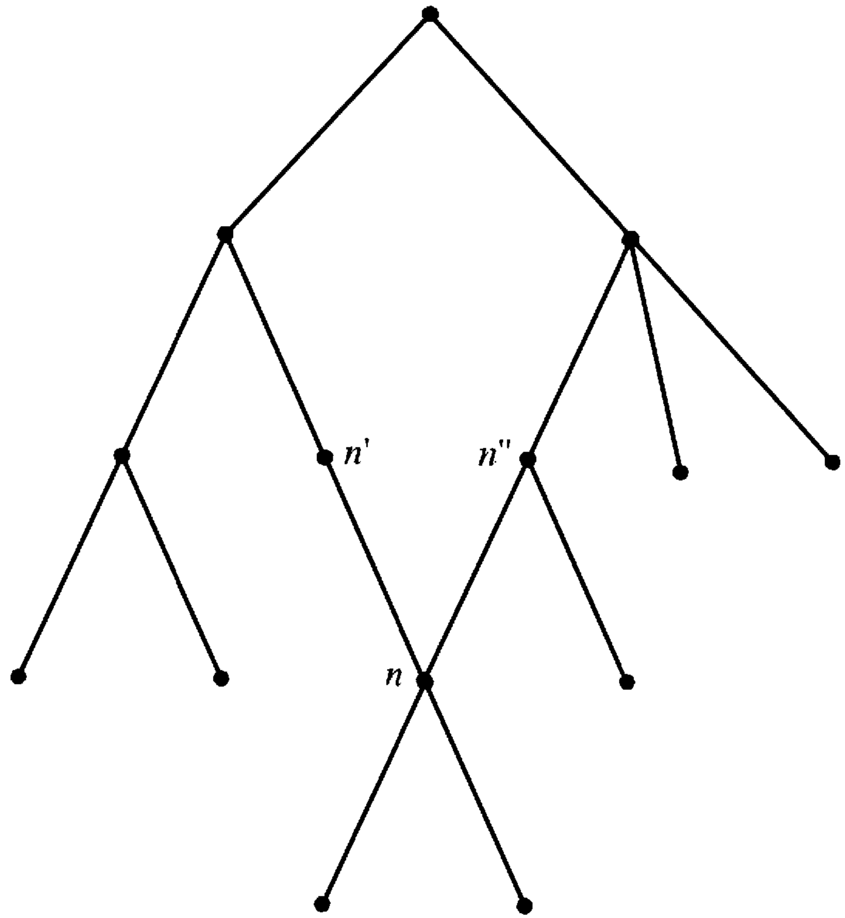
שיווי משקל נאש במשחקים בצורה רחבה

משחקים בצורה רחבה

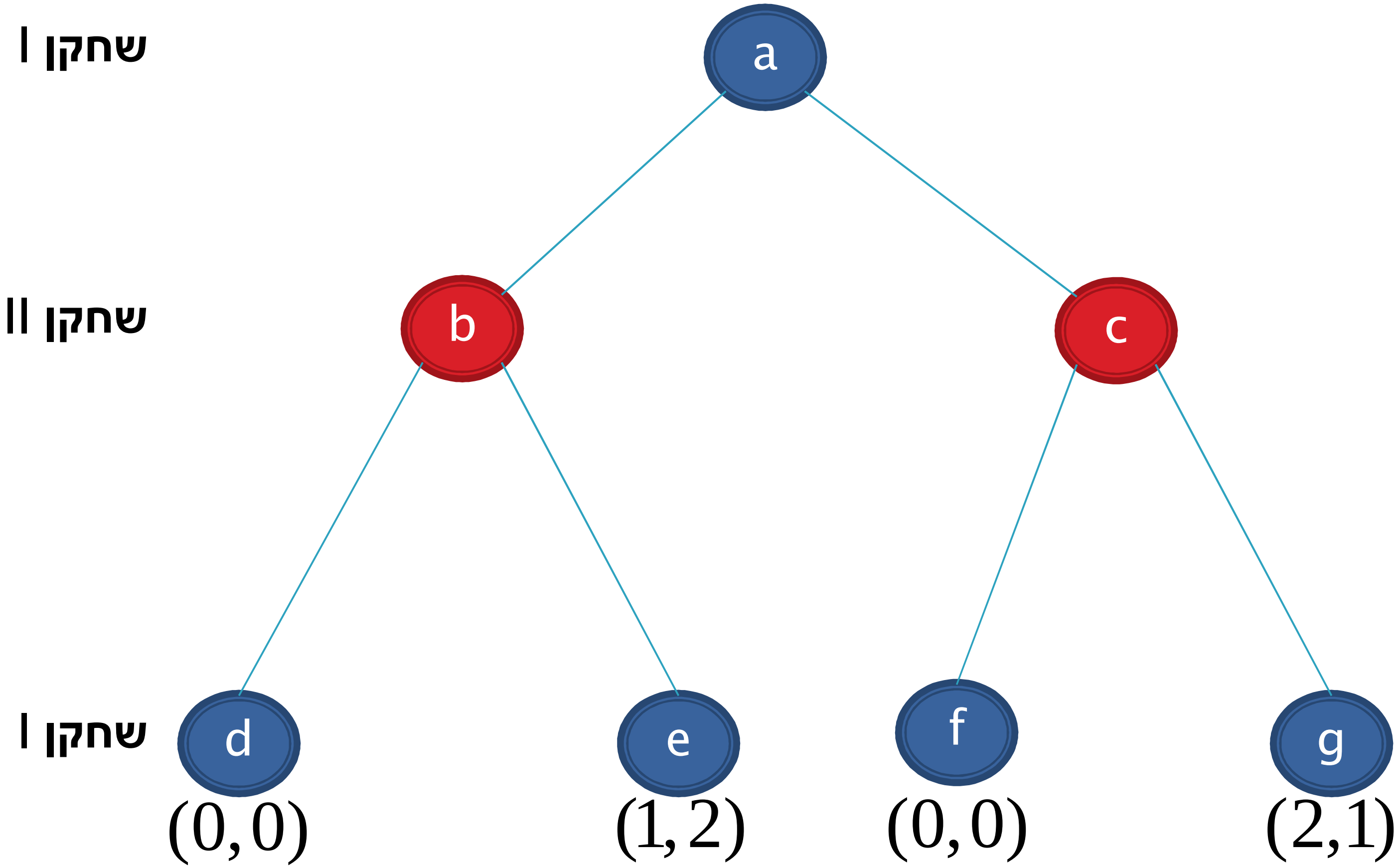
- בשיעור הקודם הצגנו משחקים בעזרת ***עץ***:
- כל ***קדקד*** שייך לאחד השחקנים (ומייצג תור במשחק)
- ***הענפים*** (/צלעות) שיוצאים מקדקד (כלפי מטה) מייצגים את הבחירות העומדות לרשות השחקן בכל תור.
- ***עלה*** מייצג סיום של תחרות / תוצאה של המשחק.



- במשחקים בצורה רחבה אנחנו לא מאפשרים הגעה לאותו קדקד ממספר ענפים שונים, למרות שזה לא ייצוג יעיל.



אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה

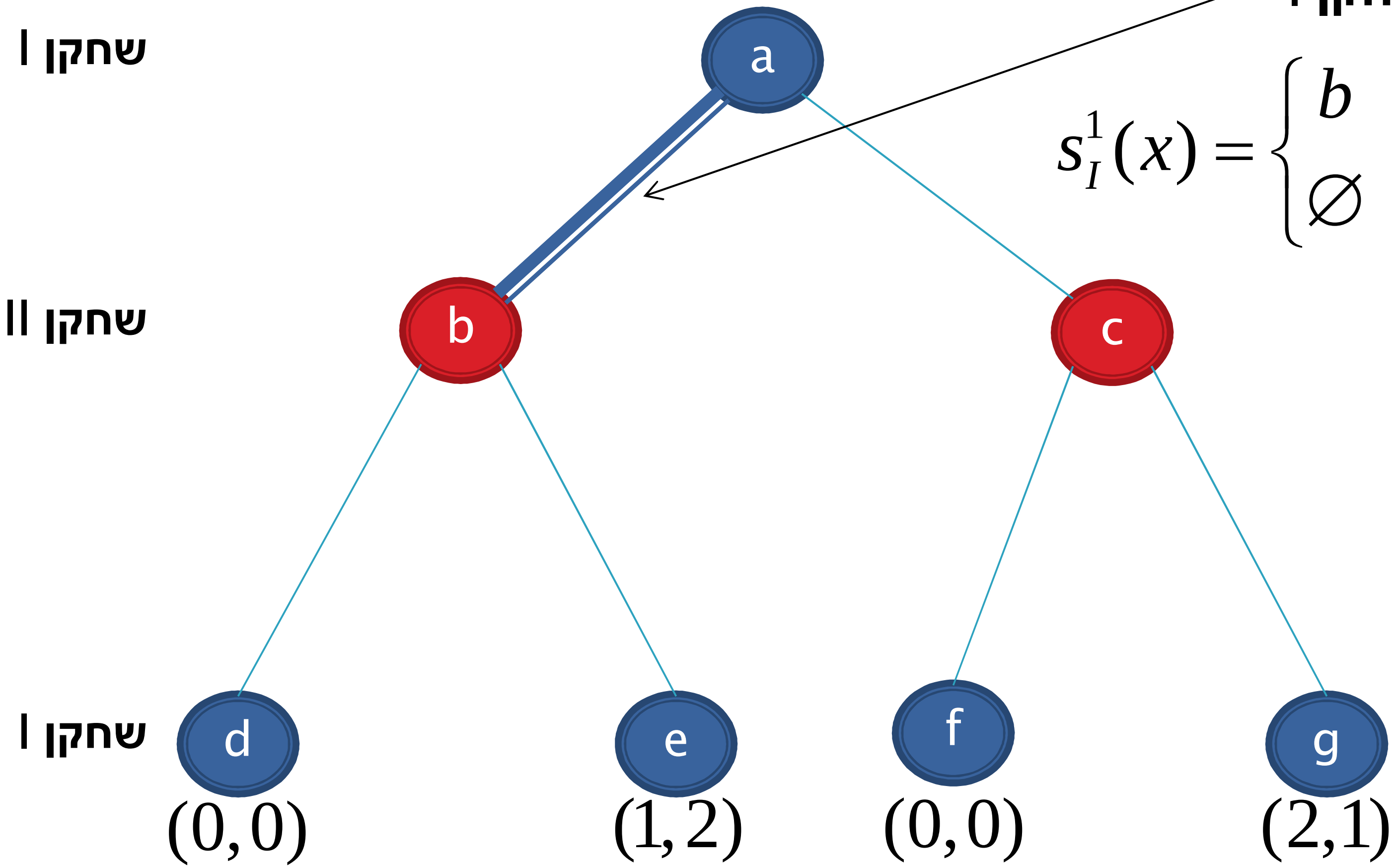


אסטרטגיה של שחקן היא החלטה מראש בכל אחד מהקדקדים שלו באיזה קדקד הוא ייבחר = פונקציה שמתאימה לכל קדקד את אחד מבניו.

אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה

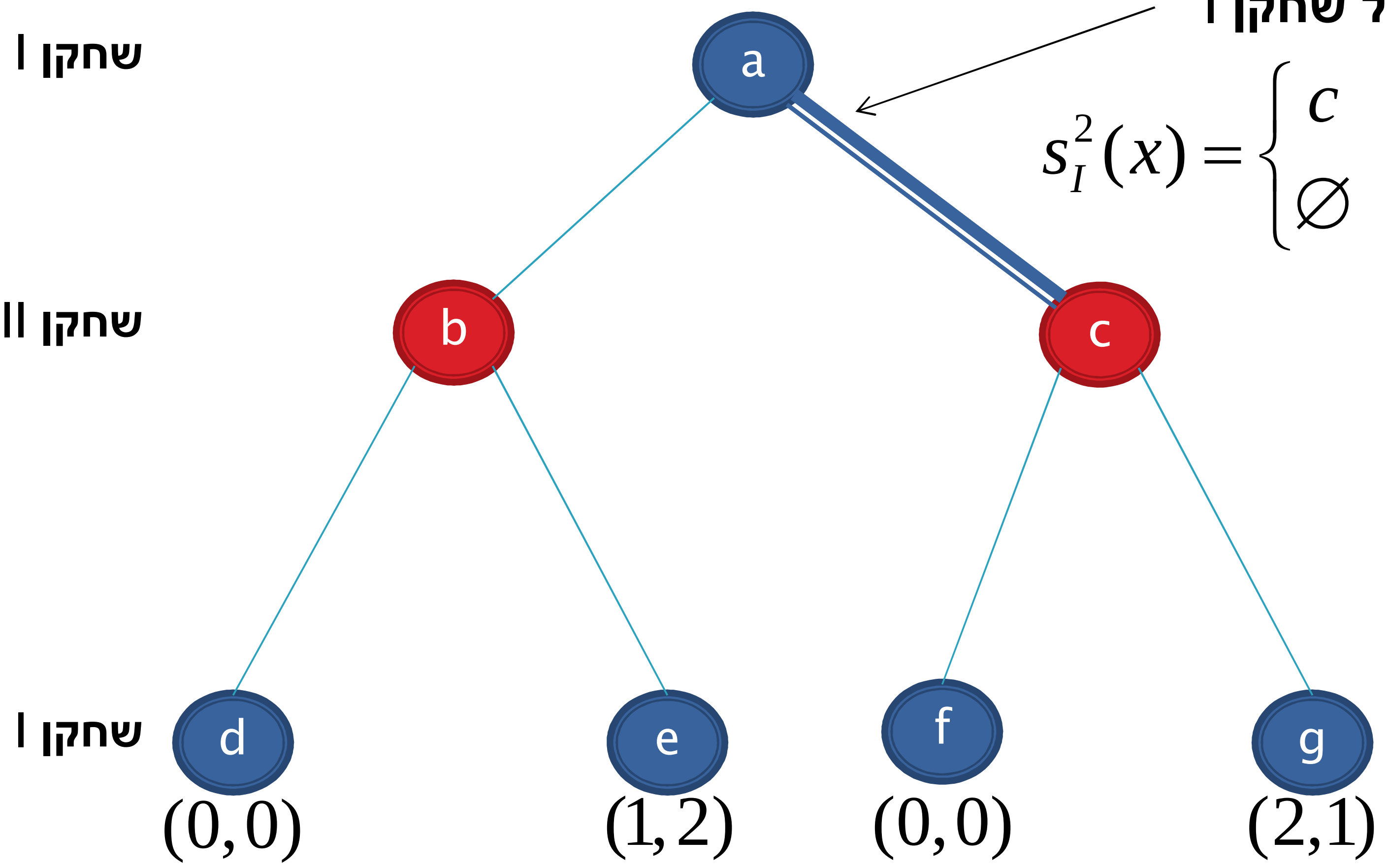
אסטרטגיה של שחקן I

$$s_I^1(x)=\begin{cases} b & x=a \\ \varnothing & x\in\{d,e,f,g\} \end{cases}$$



אסטרטגיה של שחקן היא החלטה מראש בכל אחד מהקדקדים שלו באיזה קדקד הוא ייבחר = פונקציה שמתאימה לכל קדקד את אחד מבניו.

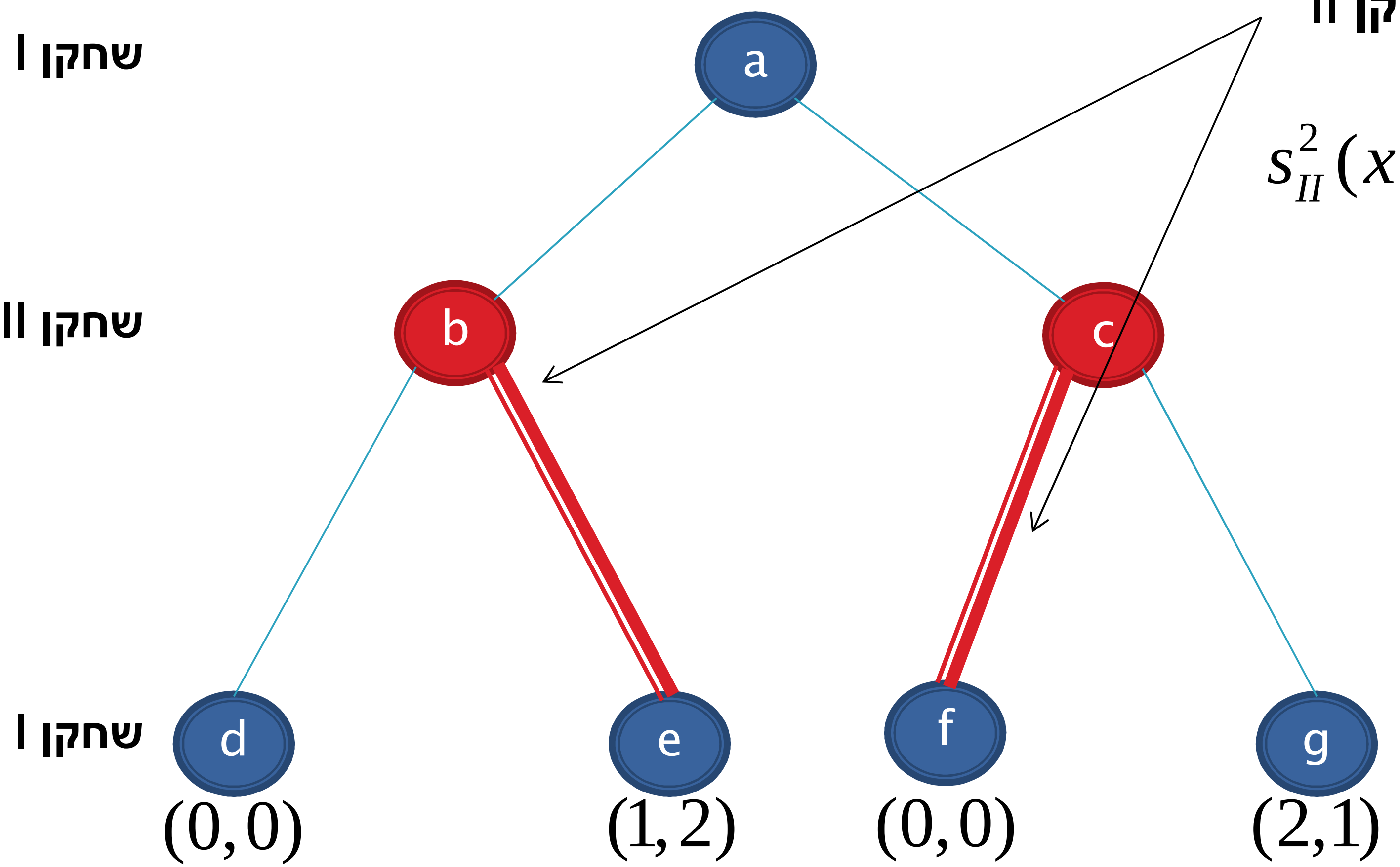
אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה



$$s_I^2(x)=\begin{cases} c & x=a \\ \varnothing & x\in\{d,e,f,g\}\end{cases}$$

אסטרטגיה של שחקן היא החלטה מראש בכל אחד מהקדקדים שלו באיזה קדקד הוא ייבחר = פונקציה שמתאימה לכל קדקד את אחד מבניו.

אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה

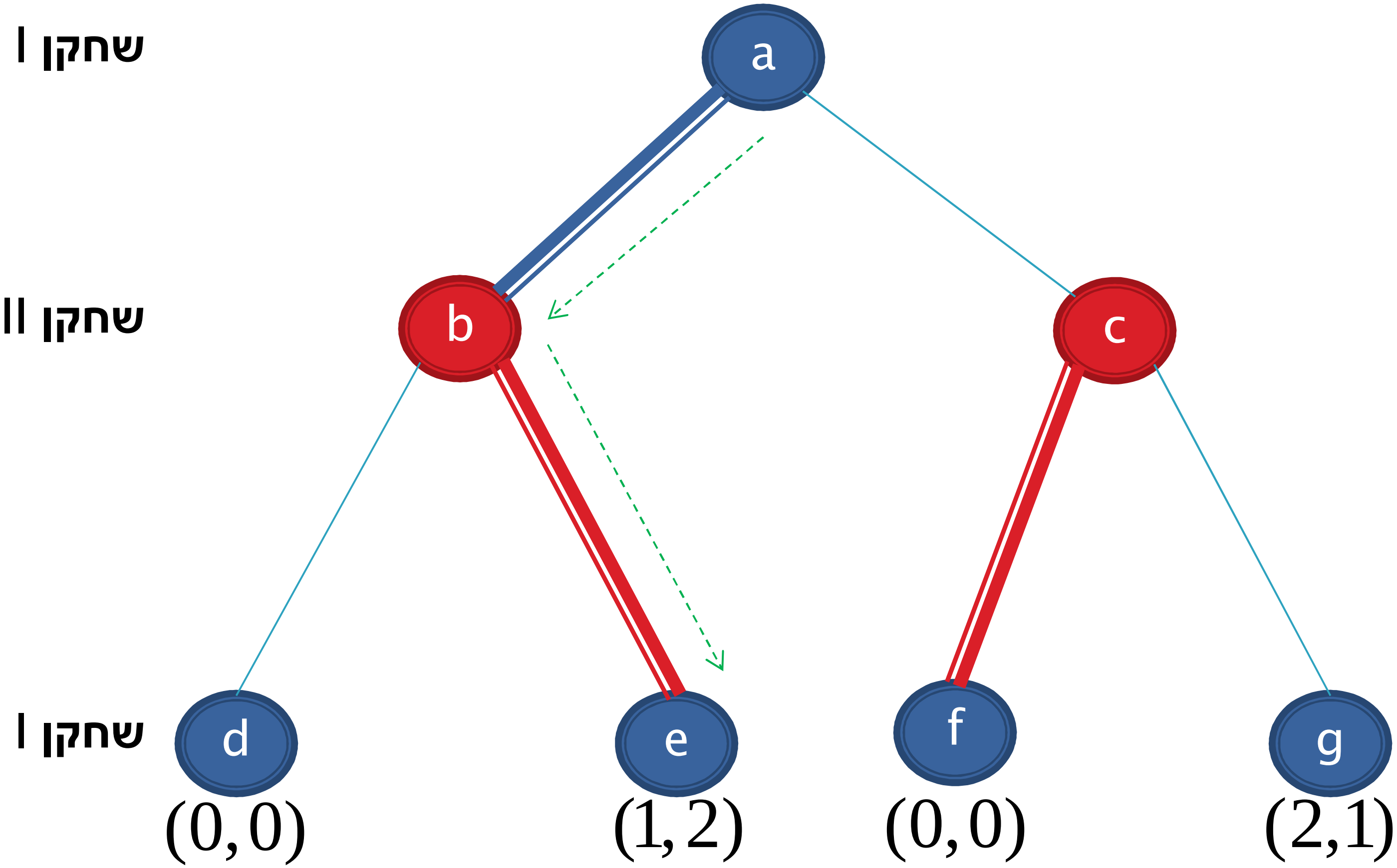


אסטרטגיה של שחקן II

$$s^2_{II}(x)=\begin{cases} e & x=b \\ f & x=c \end{cases}$$

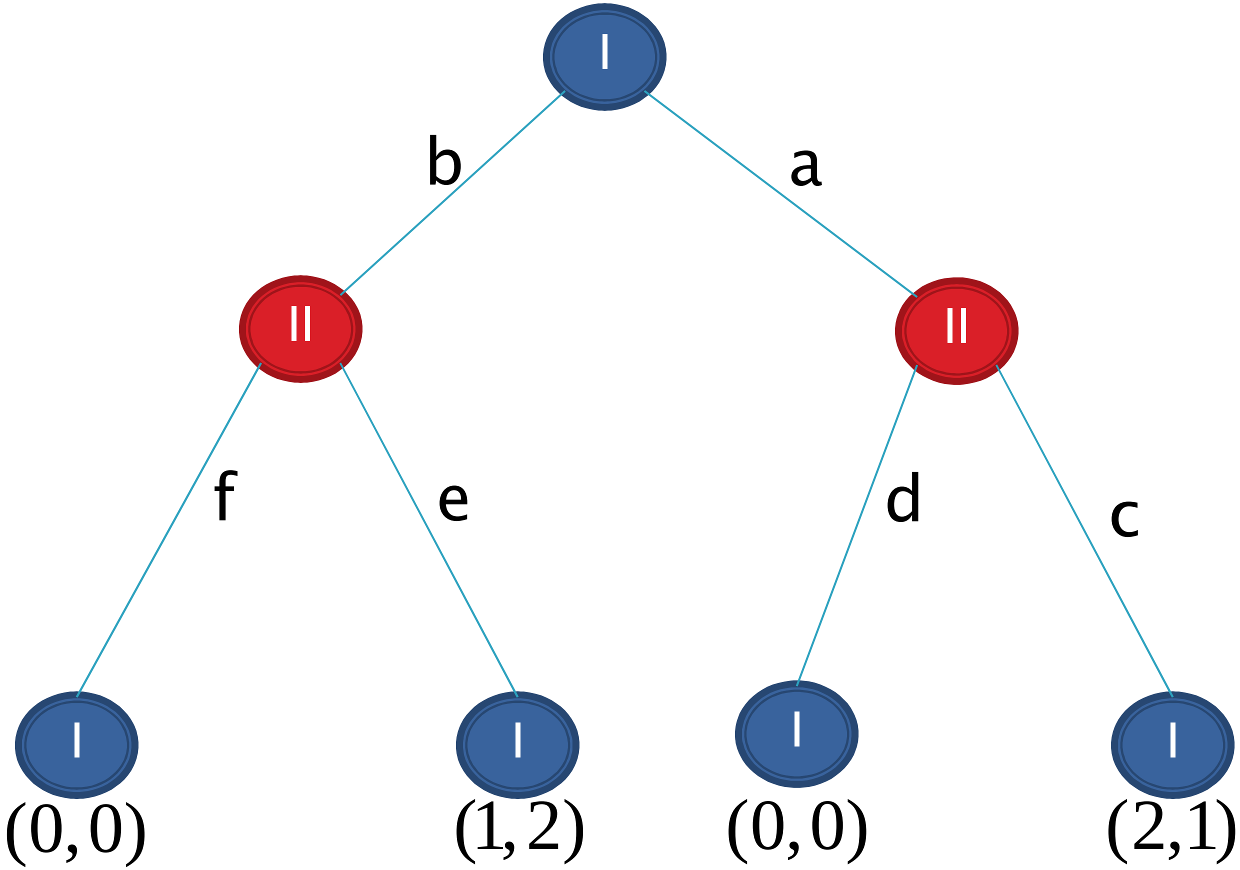
אסטרטגיה של שחקן היא החלטה מראש בכל אחד מהקדקדים שלו באיזה קדקד הוא ייבחר = פונקציה שמתאימה לכל קדקד את אחד מבניו.

אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה



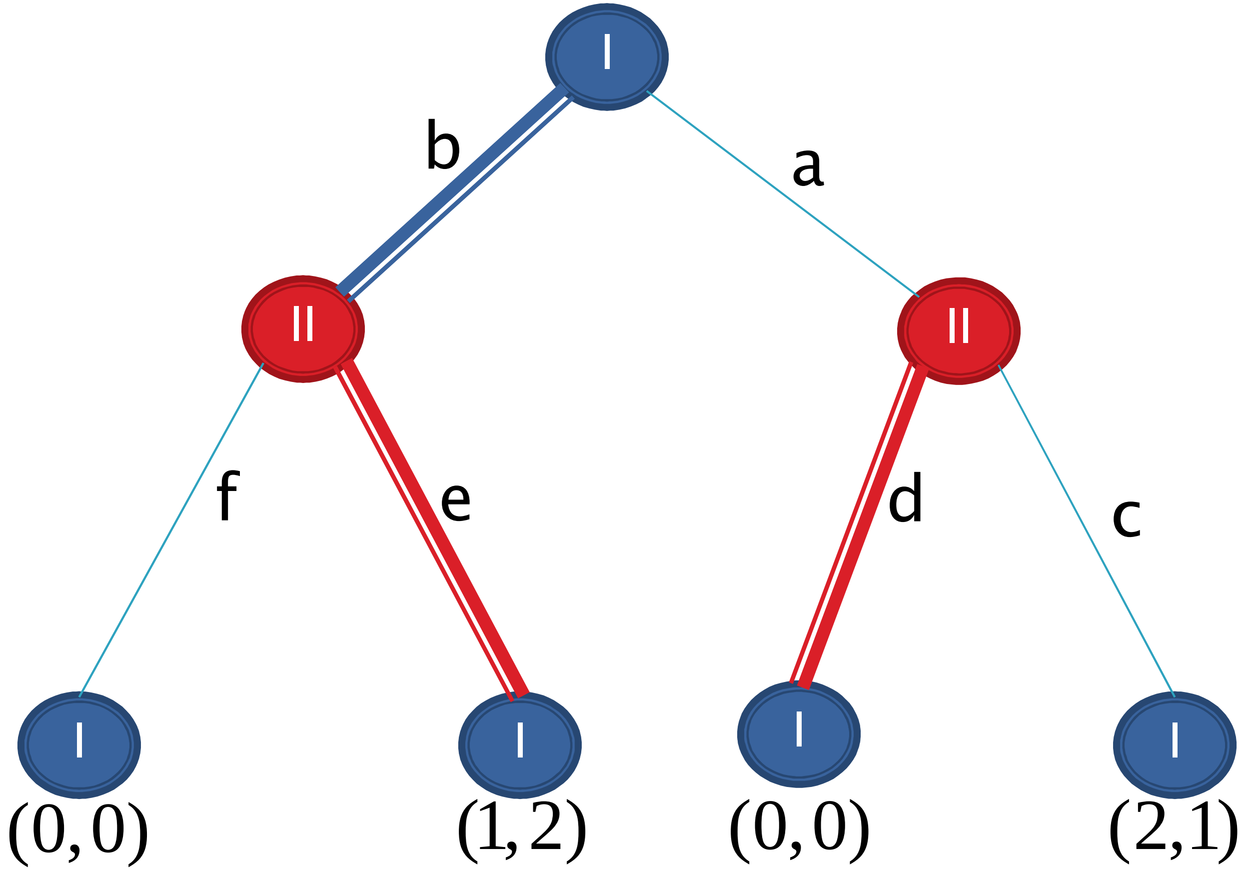
שילוב אסטרטגיות של כל השחקנים קובע בצורה יחידה מסלול משורש לעלה, ומכאן תוצאה של המשחק (***תחרות***).

ייצוג אסטרטגיה בעזרת צלעות/ענפי העץ



ניתן שם לכל ענף במקום לכל קדקד. אסטרטגיה של שחקן ניתנת לייצוג ע"י רשימת הצלעות בהן הוא בוחר.

ייצוג אסטרטגיה בעזרת צלעות/ענפי העץ



$$s_I = (b)$$

$$s_{II} = (d, e)$$

ניתן שם לכל ענף במקום לכל קדקד. אסטרטגיה של שחקן ניתנת לייצוג ע"י רשימת הצלעות בהן הוא בוחר.

מציאת שיווי משקל במשחק בצורה רחבה

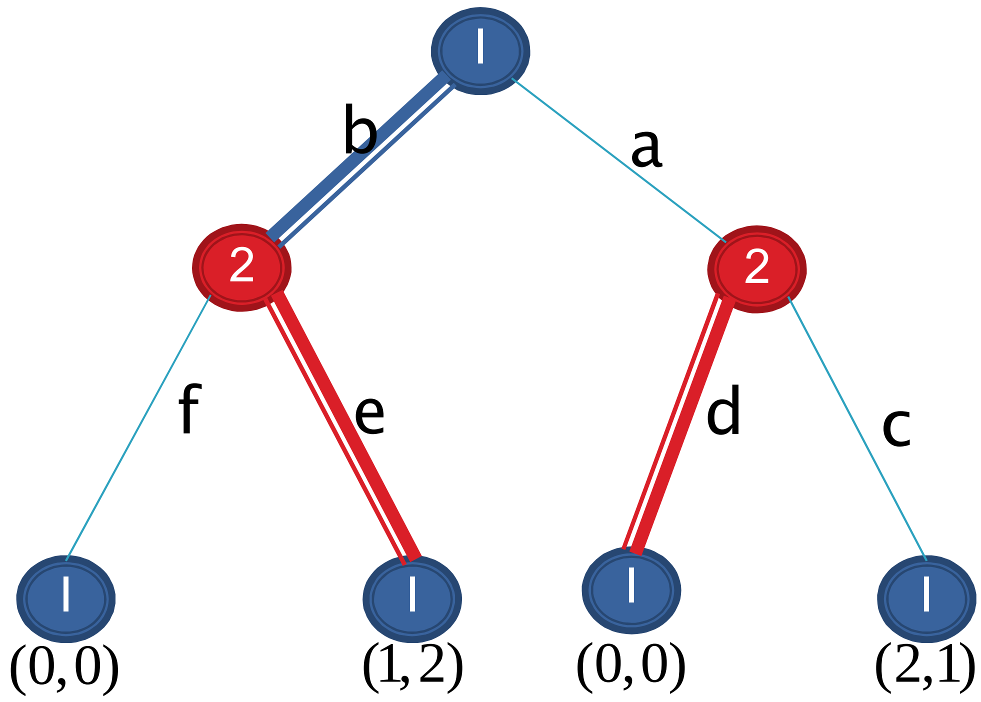
- נהפוך את המשחק למשחק אסטרטגי:

שחקן 2

שחקן 1		(c,e)	(c,f)	(d,e)	(d,f)
	a	(2,1)	(2,1)	(0,0)	(0,0)
	b	(1,2)	(0,0)	(1,2)	(0,0)

- נחשב את שיווי המשקל בשיטה הרגילה.
- קיבלנו 3 שיווי משקל: (a,(c,e)), (a,(c,f)), (b,(d,e))

איום בלתי אמין



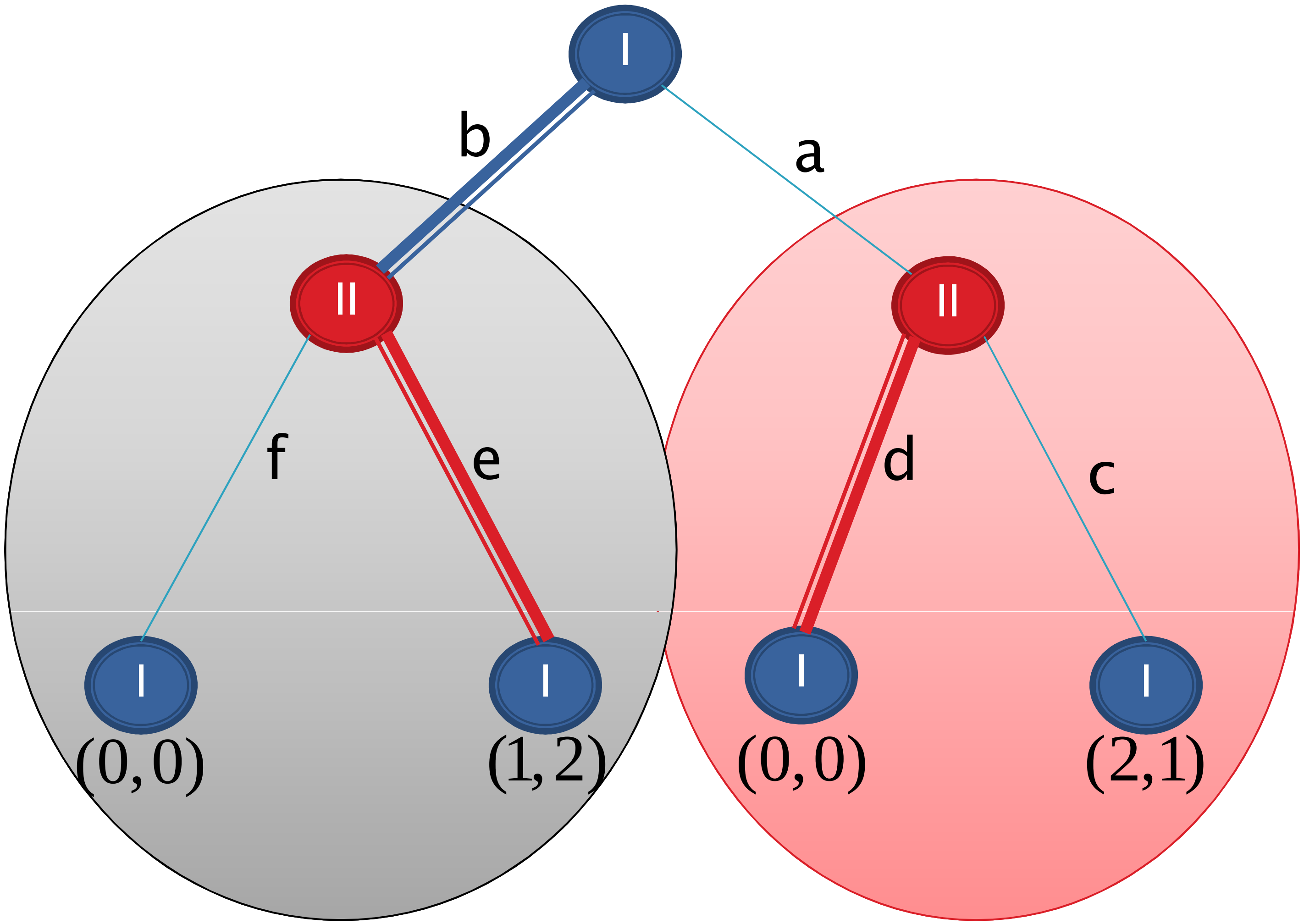
- נתבונן בשיווי משקל ((b,(d,e
- האסטרטגיה של שחקן II לא רציונלית:
- אם שחקן 1 בוחר ב a זה יהיה לא רציונלי מצד שחקן 2 לבחור ב d כיוון שזה יוביל אותו לתשלום נמוך יותר.
- האסטרטגיה הזאת של שחקן 2 היא למעשה איום שאם שחקן 1 ייבחר ב a אז שחקן 2 ייפעל בצורה לא רציונלית.
- אך האם איום זה אמין?

שיווי משקל משוכלל

- במשחק בצורה רחבה, שיווי משקל נאש נקרא ***שיווי משקל משוכלל***, אם הוא משרה שיווי משקל בכל אחד מתתי-המשחקים של המשחק.

- הערה: זה מתקיים בצורה טריויאלית עבור העלים, ולכן אין צורך לבדוק אותם.

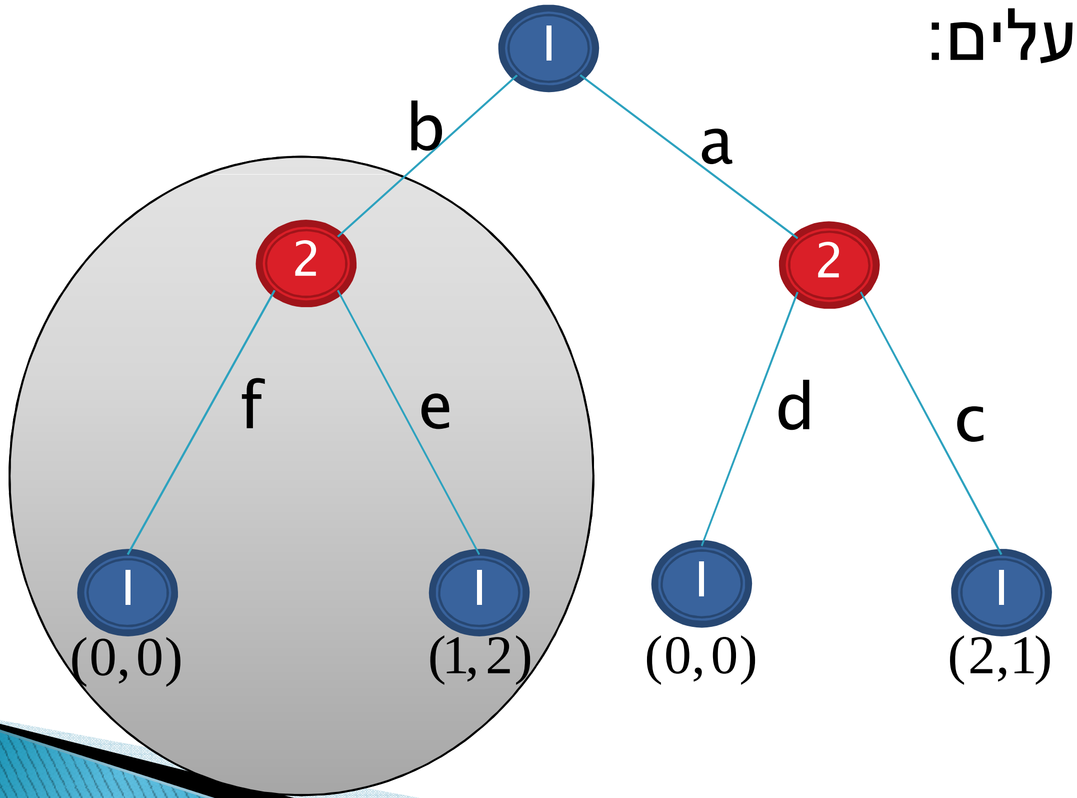
דוגמה



- במשחק הזה יש שני תתי-משחקים (שאינם עלים)
- שיווי המשקל אינו משרה שיווי משקל בתת-משחק הימני, כיוון ש d אינה הבחירה המיטבית עבור שחקן II.
- לכן ((b,(d,e)) אינו שיווי משקל משוכלל.

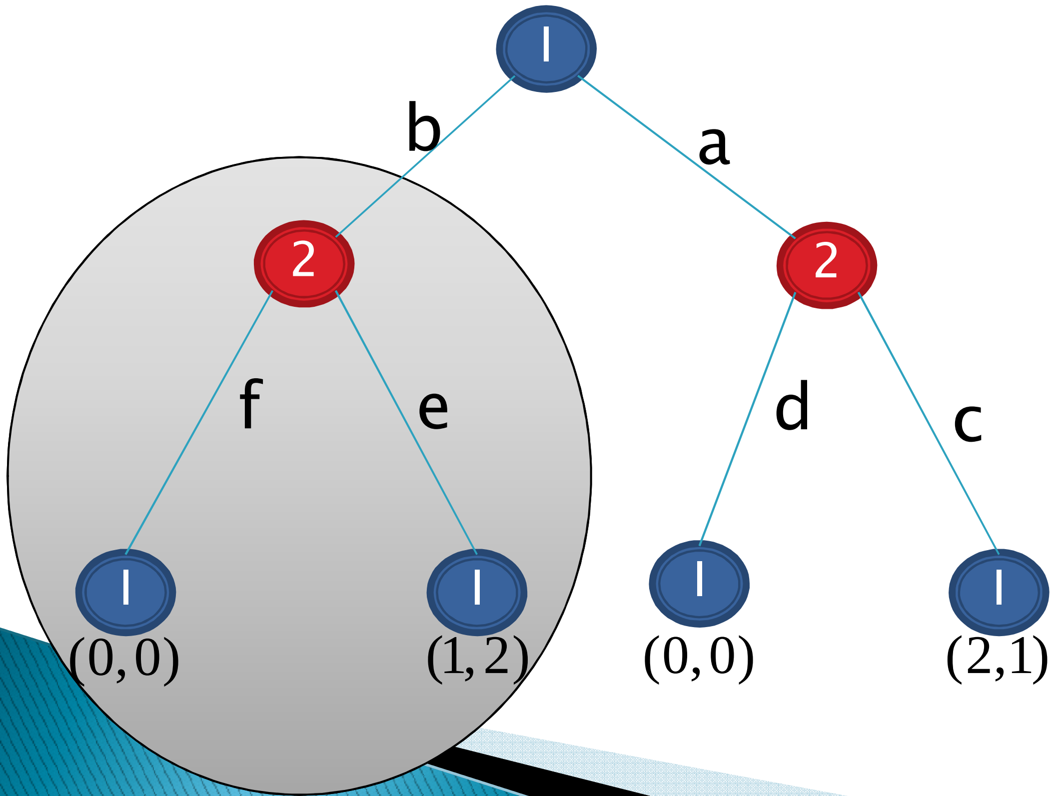
אינדוקציה לאחור

- קיים אלגוריתם למציאת שיוויי משקל נאש משוכללים, המתבסס על עקרון הוכחת משפט זרמלו בשיעור הקודם:
- שלב א': מוצאים תת-משחק בו כל הקדקדים פרט לשורש תת-המשחק הם עלים:



אינדוקציה לאחור (המשך)

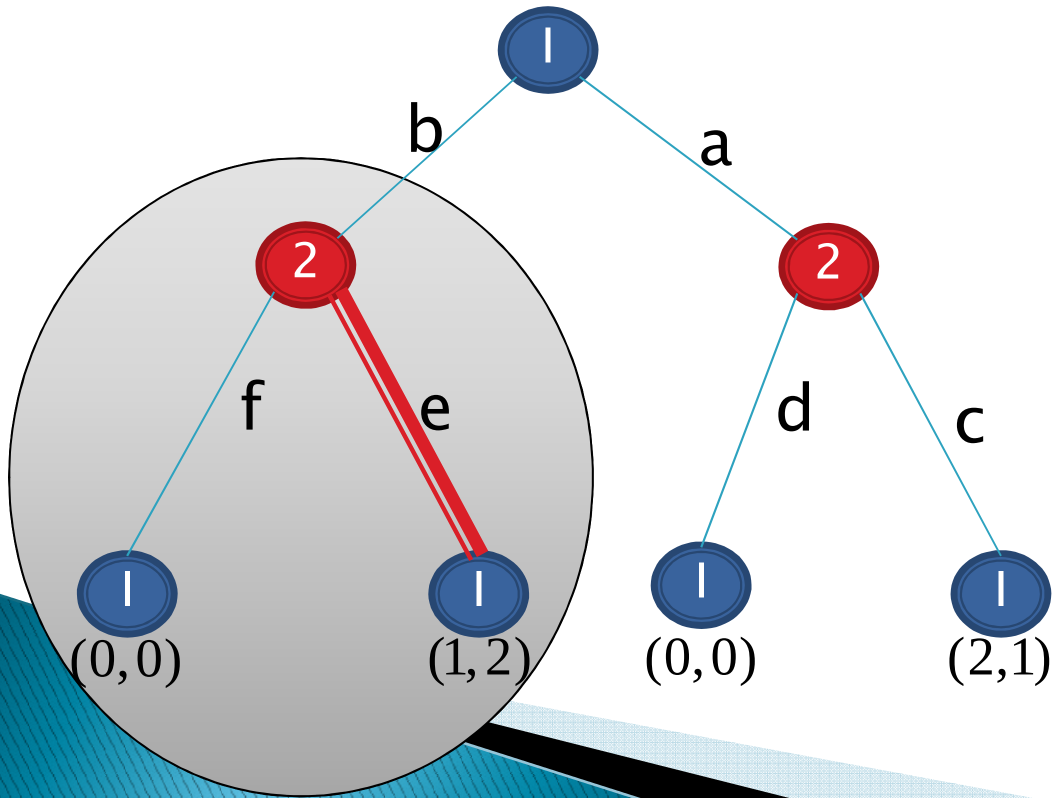
- שלב ב': שורש התת-משחק שייך לאחד השחקנים.
- בוחרים את הענף שמביא לתשלום הכי גבוה עבור השחקן.



אינדוקציה לאחור (המשך)

- שלב ב': שורש התת-משחק שייך לאחד השחקנים.
- בוחרים את הענף שמביא לתשלום הכי גבוה עבור השחקן.
- רושמים את הענף באסטרטגיה של השחקן:

$$s_{II} = (\mathrm{e})$$

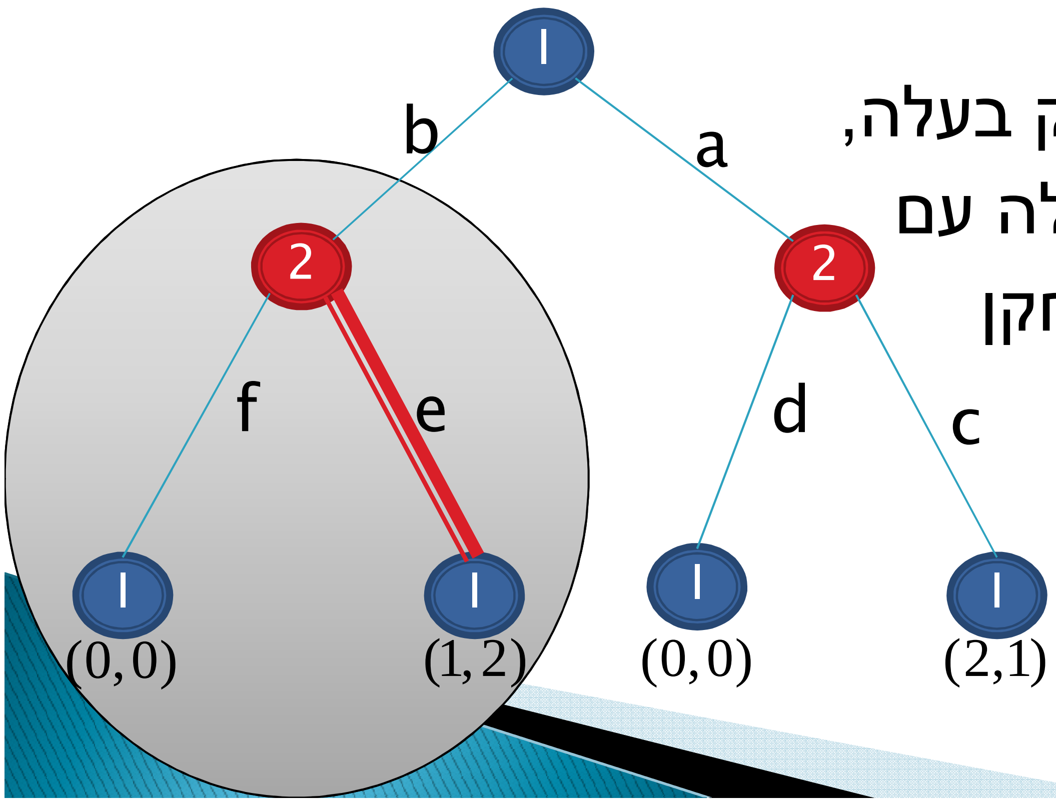


אינדוקציה לאחור (המשך)

- שלב ב': שורש התת-משחק שייך לאחד השחקנים.
- בוחרים את הענף שמביא לתשלום הכי גבוה עבור השחקן.
- רושמים את הענף באסטרטגיה של השחקן:

$$s_{II} = (e)$$

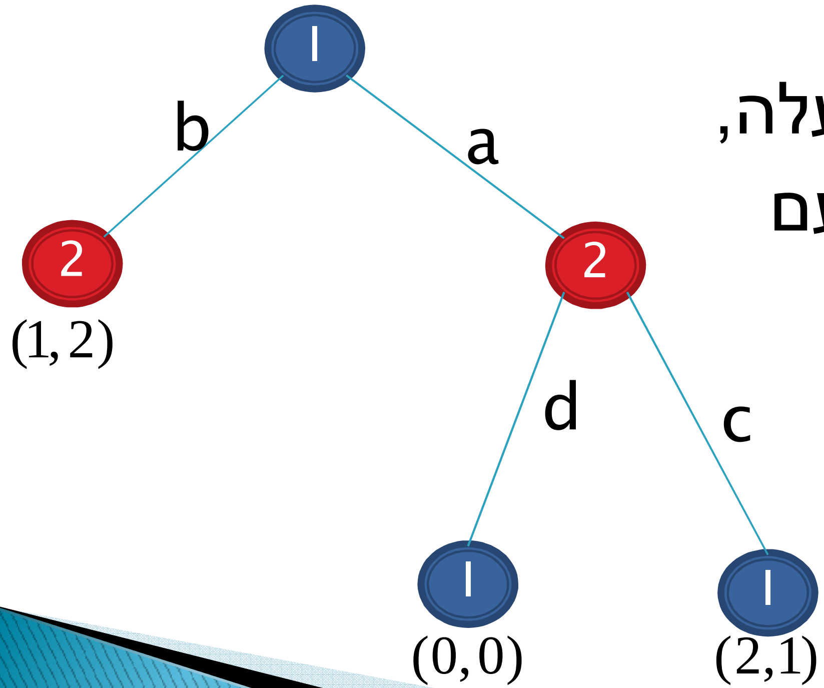
- מחליפים את התת-משחק בעלה, שתוצאתו היא כתוצאת העלה עם התשלום הגבוה ביותר לשחקן ששורש התת-המשחק שייך לו.



אינדוקציה לאחור (המשך)

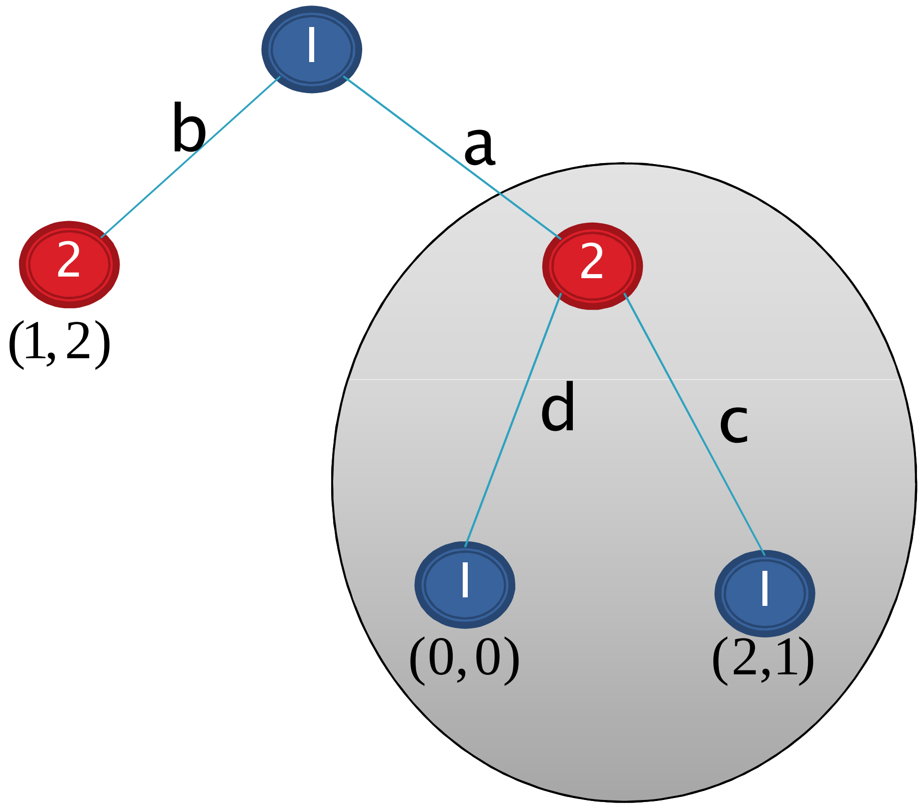
- שלב ב': שורש התת-משחק שייך לאחד השחקנים.
- בוחרים את הענף שמביא לתשלום הכי גבוה עבור השחקן.
- רושמים את הענף באסטרטגיה של השחקן:

$$s_{II} = (\mathrm{e})$$

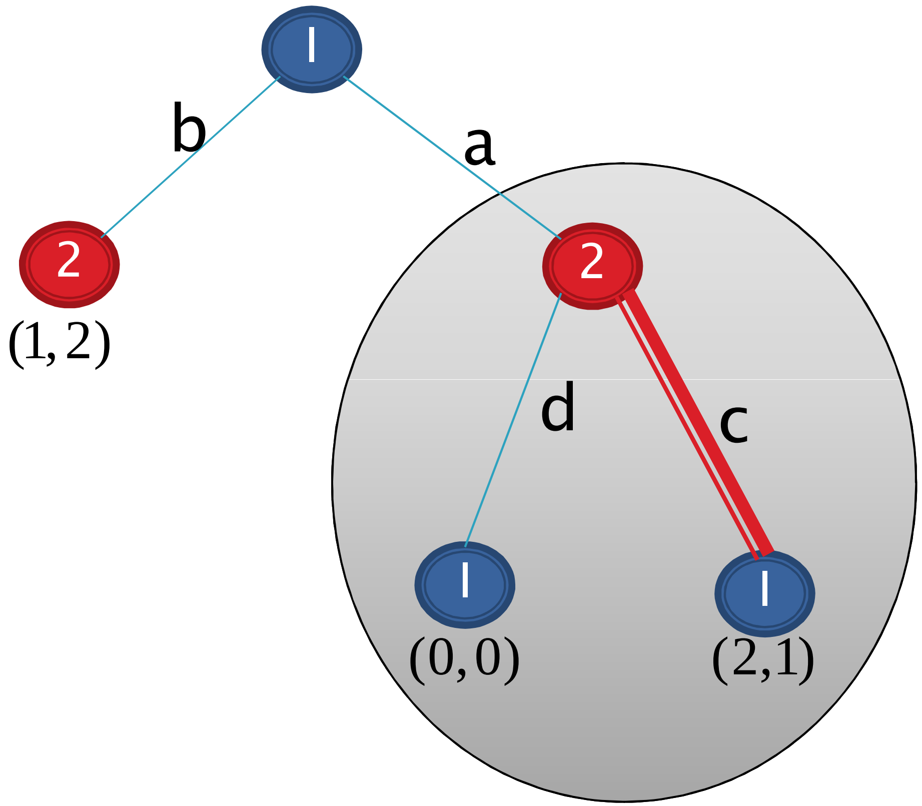


- מחליפים את התת-משחק בעלה, שתוצאתו היא כתוצאת העלה עם התשלום הגבוה ביותר לשחקן ששורש התת-המשחק שייך לו.
- כעת חוזרים לשלב א'

אינדוקציה לאחור (המשך דוגמה)

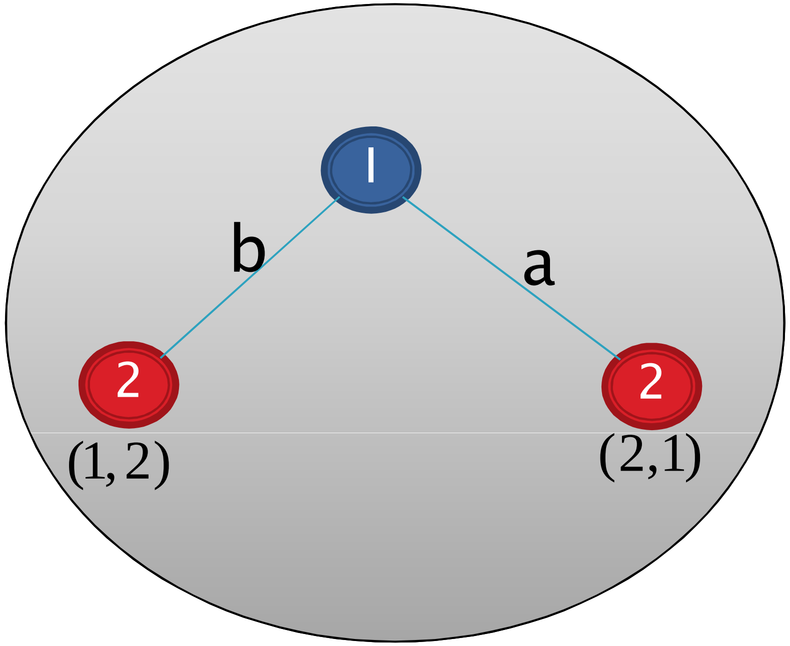


אינדוקציה לאחור (המשך דוגמה)



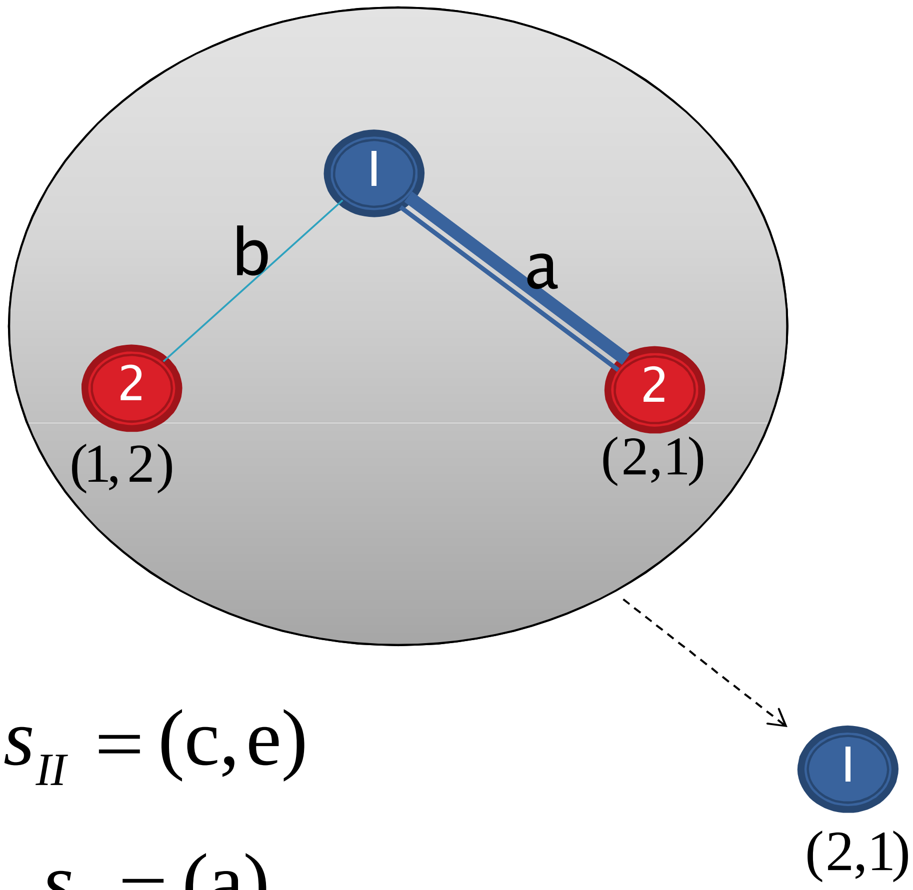
$$s_{II} = (c, e)$$

אינדוקציה לאחור (המשך דוגמה)



$$s_{II} = (\mathrm{c}, \mathrm{e})$$

אינדוקציה לאחור (המשך דוגמה)



$$s_{II} = (c, e)$$

$$s_I = (a)$$

סיכום

- אם כך, קיבלנו שמתוך שלושת שיוויי המשקל המקוריים במשחק, (a,(c,e)), (a,(c,f)), (b,(d,e)), נשארנו רק עם שיווי משקל משוכלל יחיד: (a,(c,e)).

- איך מוכיחים שאלגוריתם האינדוקציה לאחור מחזיר שיווי משקל משוכלל? מוכיחים בעזרת אינדוקציה לאחור כמו במשפט זרמלו.

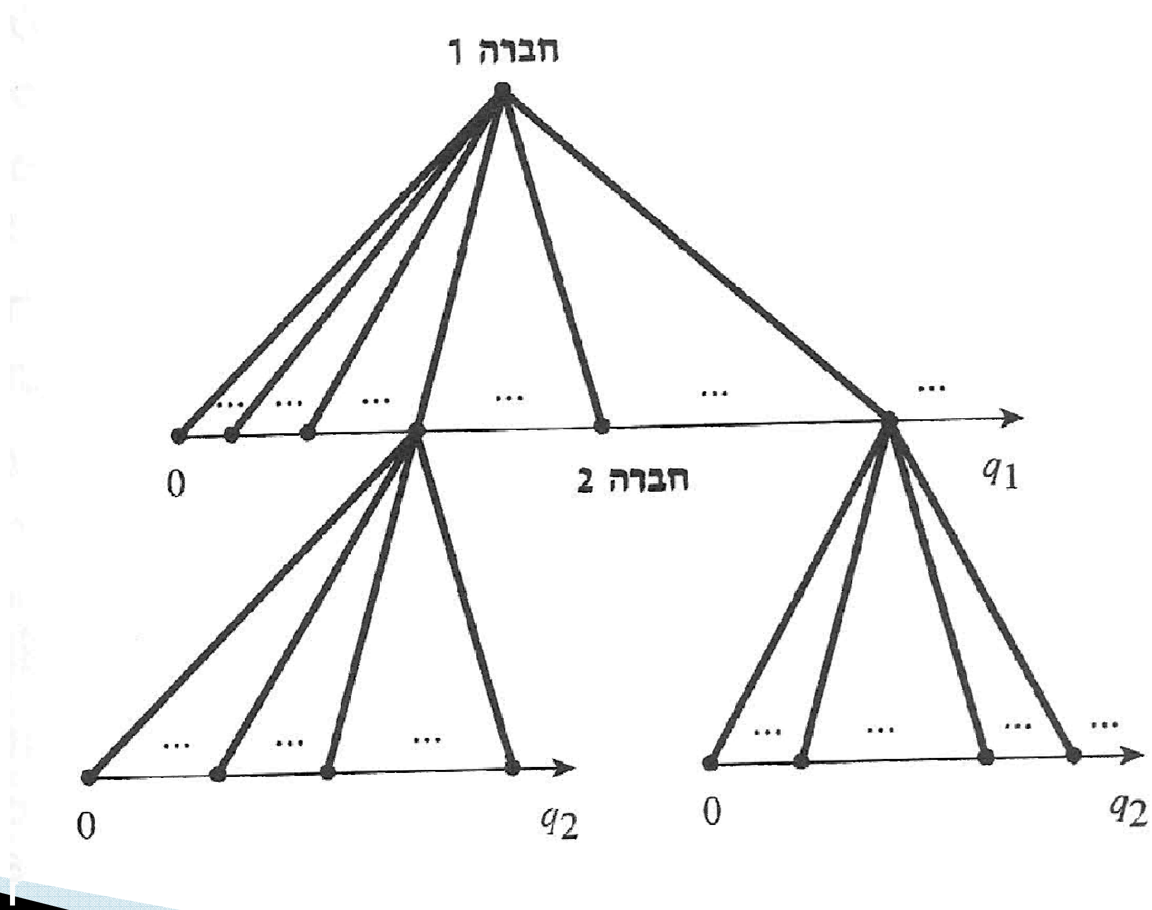
- בסיס המשפט מתקיים עבור עצים בגובה 1 (כלומר כל בניו של השורש הם עלים). מניחים שהאלגוריתם עובד על עצים בגובה עד n-1 ומוכיחים שהאלגוריתם עובד עבור עצים בגובה n.

תחרות עסקית – מודל סטקלברג

- בשיעור 7 הצגנו את המודלים של קורנו וברטרנד לתחרות עסקית.
- במודל של קורנו שתי חברות התחרו על כמויות הייצור.
- מה קורה עם הופכים את המודל של קורנו למשחק בצורה רחבה, בו חברה 1 מבצעת את החלטתה על הכמות שהיא מייצרת ***לפני*** חברה 2.
- האם שיווי המשקל במשחק משתנה?

תחרות עסקית – מודל סטקלברג

- בכל אחד מהתורות יש לשחקן אינסוף אפשרויות



תזכורת

- פונקצית הביקוש בשוק הייתה:

$$P = a - b(q_1 + q_2)$$

- העלות השולית היתה קבועה ושווה ל c.
- פונקציות התשלום היו הרווח הנקי של החברות:

$$u_1(q_1, q_2) = (P - c)q_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = (P - c)q_2 = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - cq_2$$

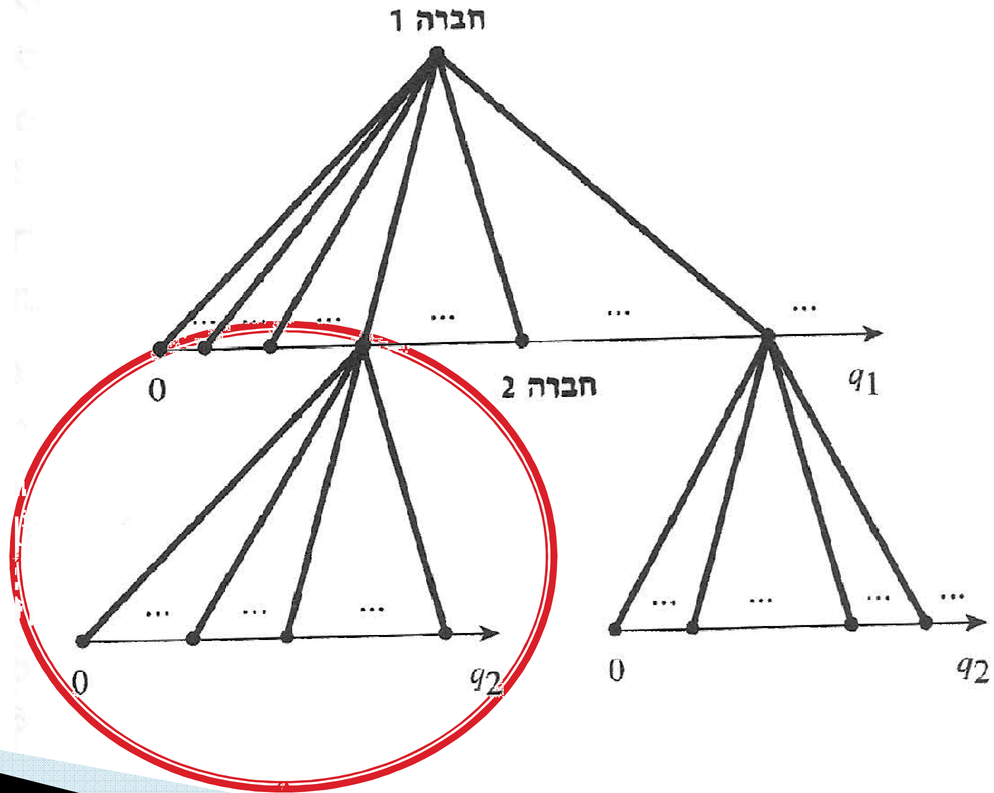
- פונקציות התגובה המיטבית היו:

$$BR_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

$$BR_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

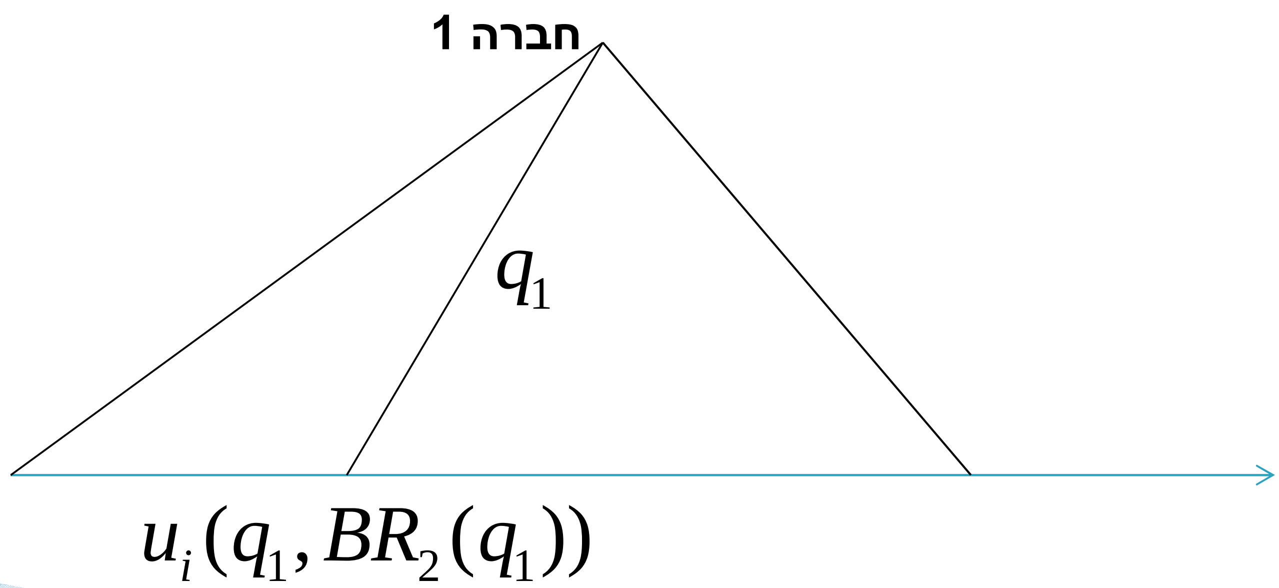
אינדוקציה לאחור על מודל סטקלברג

- לפי אלגוריתם האינדוקציה לאחור אנחנו צריכים לבחור בתגובה הטובה ביותר של שחקן 2 בכל אחד מהקדקדים בתור השני.



אינדוקציה לאחור על מודל סטקלברג

- התגובה הטובה ביותר של שחקן 2 תלויה בערך q_1 שאותו בחר שחקן 1 בתור הראשון.
- התגובה הטובה ביותר של שחקן 2 היא כמובן $BR_2(q_1)$.
- לאחר שנקפל את העץ אחורה, נקבל:



אינדוקציה לאחור על מודל סטקלברג

- כעת על חברה 1 לבחור את כמות הייצור שתביא לה את התשלום המקסימלי.
- כלומר צריך להביא למקסימום את הביטוי הבא:

$$u_1(q_1, BR_2(q_1)) = u_1\left(q_1, \frac{a-c-bq_1}{2b}\right)$$

$$= aq_1 - bq_1^{\,2} - bq_1\left(\frac{a-c-bq_1}{2b}\right) - cq_1$$

$$= aq_1 - bq_1^{\,2} - \frac{1}{2}aq_1 + \frac{1}{2}cq_1 + \frac{1}{2}bq_1^2 - cq_1$$

$$= \frac{1}{2}aq_1 - \frac{1}{2}cq_1 - \frac{1}{2}bq_1^2$$

אינדוקציה לאחור על מודל סטקלברג

- גזירה והשוואה ל 0 של

$$\frac{1}{2}aq_1 - \frac{1}{2}cq_1 - \frac{1}{2}bq_1^2$$

תיתן לנו את התגובה המיטבית של שחקן 1 בעץ המצומצם.

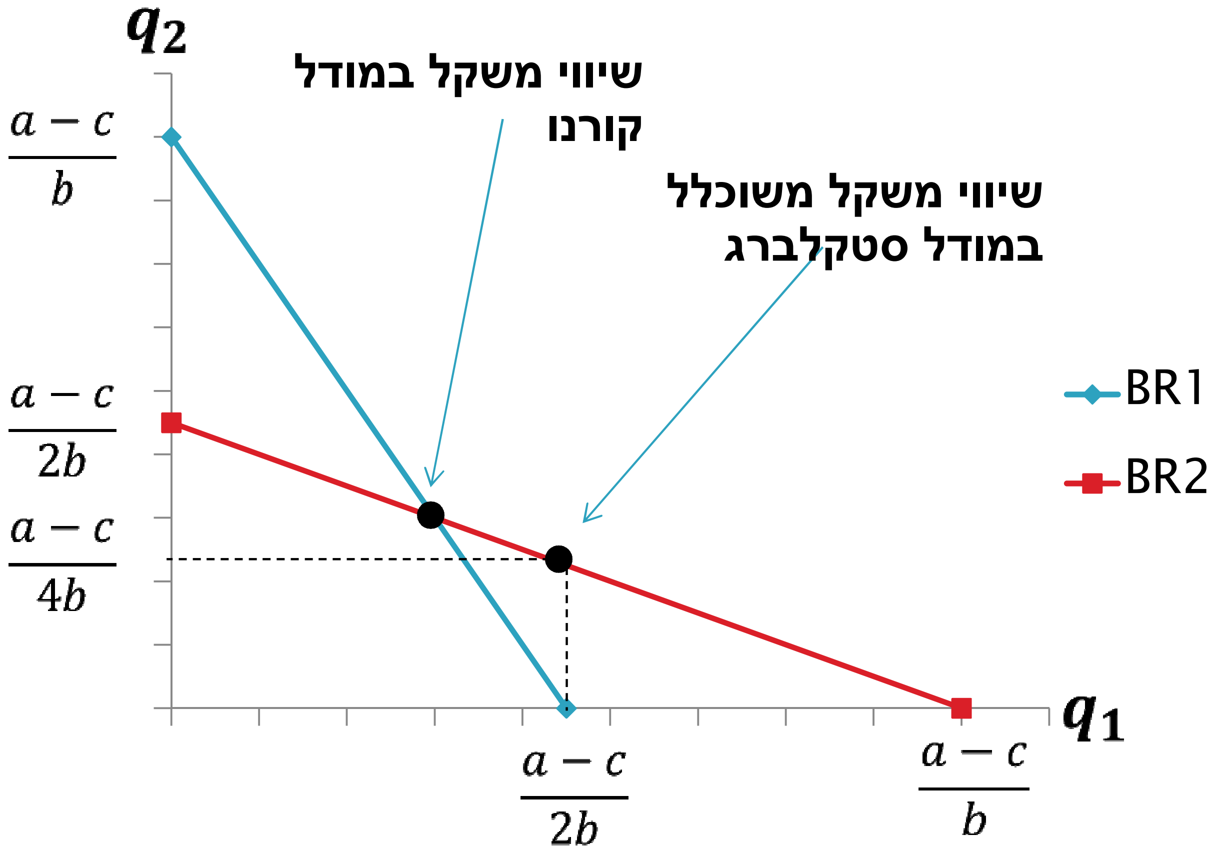
- נקבל:

$$q_1^{**} = \frac{a-c}{2b}$$

- בערך זה של q_1 נקבל את הערך הבא של q_2:

$$BR_2(q_1^{**}) = \frac{a-c-bq_1}{2b} = \frac{a-c}{4b}$$

אינדוקציה לאחור על מודל סטקלברג



סיכום מודל סטקלברג

- ע"י התחייבות מראש של ייצור כמות מונופול, שחקן 1 יכול למעשה להגדיל את רווחיו, למרות שאינו נמצא על עקומת התגובה המיטבית שלו.

	תחרות משוכללת	סטקלברג	דואופול קורנו	מונופול
רווח אינדיבידואלי לחברות	0	$\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{16b}$	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	$\frac{(a-c)^2}{4b}$
כמות תוצר כללית	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{3(a-c)}{4b}$	$\frac{2(a-c)}{3b}$	$\frac{a-c}{2b}$
עלות מוצר לצרכן	c	$\frac{a+3c}{4}$	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{a+c}{2}$