1. הבוחן בלינארית יתקיים בעוד שבועיים בדיוק $04/08$. החומר: עדיין לא סגור. מה שעשיתם היום בהרצאה ייכלל. ייתכן שגם החומר של יום ראשון.

2. תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

(א) מצאו מטריצה שאינה שייכת ל $\mathrm{span}S$, אם אפשר.

(ב) האם S בת״ל?

פתרון:

א. מטריצה כללית ב$\mathbb{R}^{2\times 2}$ נראית ככה:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

המטריצה $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ שייכת ל$span(S)$ אם ורק אם קיימים סקלרים x,y,z, כך ש:

$$x\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x&x\\0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y&0\\y&3y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&-z\\z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+2y+z&x-z\\y+z&x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

שתי המטריצות כבר שוות בגדלים שלהן. לכן כדי שהן יהיו שוות, כל מה שנותר זה שהן יהיו שוות בכל רכיב. כלומר, במקרה שלנו:

$$x+2y+z=a$$

$$x-z=b$$

$$y+z=c$$

$$x+3y=d$$

זאת מערכת של 4 משוואות ב3 נעלמים. אנחנו שואלים לאילו ערכי a,b,c,d קיים לה פתרון. נעביר למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&0&-1&b\\0&1&1&c\\1&3&0&d\end{array}\right)$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 1 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-a+2c \\ 0 & 1 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-a+2c \\ 0 & 0 & -2 & d-a-c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}$$

מסקנה: למערכת יהיה פתרון אם ורק אם $b-a+2c=0$. (אם הביטוי שונה מ0 תהיה שורת סתירה, ולכן לא יכול להיות פתרון. אם הביטוי שווה ל0, אז אין שורות סתירה, כי זאת שורת האפסים היחידה)
כלומר, המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

שייכת ל$span(S)$ אם ורק אם, מתקיים $b-a+2c=0$.
דוגמא למטריצה לא ב$span$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא למטריצה שכן ב$span$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

הבה נמצא את הסקלרים שמתאימים למטריצה הזאת. (ייתכן שיש יותר מאפשרות אחת).
איך עושים את זה?
נציב $a=1, b=1, c=0, d=9$
במערכת המשוואות שכתבנו לעיל. (אפשר להציב בנקודה שבה עצרנו את הדירוג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-0.5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נקבל ש:

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ב. האם הקבוצה בת"ל? קבוצה היא בת"ל אם הצירוף היחיד של האיברים שנותן 0, הוא הצירוף הטריוויאלי (כלומר, כל המקדמים שווים 0).
אנחנו מסתכלים על המשוואה:

$$x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ושואלים האם יש יותר מפתרון אחד. (פתרון אחד לפחות תמיד קיים- כשכל המשתנים הם 0. השאלה אם יש פתרון נוסף)
השאלה היא האם למערכת המשוואות הבאה יש יותר מפתרון אחד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כבר עשינו את הדירוג והגענו ל-

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

אין משתנים חופשיים, ולכן למערכת יש פתרון יחיד. זה אומר שהקבוצה בת"ל.

3. תרגיל: במרחב $V = \mathbb{R}_2[x]$ נגדיר $p_1(x) = 2 + 6x - 5x^2, p_2(x) = 1 + 2x - 3x^2, p_3(x) = 1 - 2x - 5x^2$ האם $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ בת"ל? אם לא, מצאו צ"ל לא טריוואלי שמתאפס.
פתרון:

$$a(2 + 6x - 5x^2) + b(1 + 2x - 3x^2) + c(1 - 2x - 5x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(2a + b + c) + (6a + 2b - 2c)x + (-5a - 3b - 5c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

מקבלים את מערכת המשוואות הבאה:

$$2a + b + c = 0$$

$$6a + 2b - 2c = 0$$

$$-5a - 3b - 5c = 0$$

השאלה היא: האם למערכת יש יותר מפתרון אחד.
אחרי דירוג מגיעים למערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מסקנה: יש משתנה חופשי ולכן הפולינום ת"ל.
כעת נמצא צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי.
בשביל זה אפשר לפתור את המערכת.
אבל למעשה מספיק למצוא פתרון אחד לא טריוויאלי של המערכת.
לצורך כך, נציב במשתנה החופשי מספר (לא 0). למשל $c = 1$, לכן $b = -5$, ו$a = 2$
כלומר,

$$2(2 + 6x - 5x^2) - 5(1 + 2x - 3x^2) + 1(1 - 2x - 5x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

4. תרגיל: יהא V מ"ו, ויהיו S_1, S_2 תתי קבוצות. הוכיחו: אם $S_1 \subseteq S_2$ אז $span\,(S_1) \subseteq span\,(S_2)$.
הוכחה:
הגדרה ראשונה ל$span(S)$: תת המרחב הקטן ביותר שמכיל את S. (כלומר, החיתוך של כל תתי המרחבים שS מוכל בהם).
ראשית, מהגדרת $span(S_2)$, הוא תת מרחב שמכיל את S_2, ומכיוון ש$S_1 \subseteq S_2$, אז $S_1 \subseteq span(S_2)$.
מההגדרה של $span(S_1)$, הוא התת מרחב הקטן היותר שמכיל את S_1, כלומר, הוא מוכל בכל תת מרחב שמכיל את S_1. בפרט, $span(S_1) \subseteq span(S_2)$.
הגדרה שניה ל$span(S)$: כל הצירופים הלינאריים של איברי S.
יהי $v \in span(S_1)$. אז $v = \alpha_1 s_1 + ... \alpha_n s_n$ כאשר $s_1, ..., s_n \in S_1$. מכיוון ש$S_1 \subseteq S_2$, אז $s_1, ..., s_n \in S_2$. ולכן $v \in span(S_2)$.

5. תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו v_1, v_2 וקטורים. הוכיחו: v_1, v_2 ת"ל אמ"מ (v_1כפולה של v_2 או v_2 כפולה של v_1)
פתרון: $\Longleftarrow$: נניח שv_1, v_2 ת"ל. כלומר, יש סקלרים α, β לפחות אחד מהם שונה מ0, כך ש:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$$

$$\alpha v_1 = -\beta v_2$$

אם $\beta \neq 0$ אז

$$v_2 = -\frac{\alpha}{\beta} v_1$$

וסיימנו.

אחרת, $\beta = 0$. אבל אז בהכרח $\alpha \neq 0$.

$$v_1 = -\frac{\beta}{\alpha} v_2$$

(למעשה $v_1 = 0v_2$)

$\Longleftarrow$: נניח שאחד מהוקטורים הוא כפולה של השני.

בה"כ v_1 הוא כפולה של v_2. כלומר, $v_1 = \alpha v_2$. (עבור α כלשהו מהשדה).

$$v_1 - \alpha v_2 = 0$$

מצאנו צירוף מתאפס לא טריוויאלי, כי המקדם של v_1 הוא 1.

6. תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו v_1, v_2, v_3 וקטורים. הוכיחו/הפריכו: אם v_1, v_2, v_3 בת"ל בזוגות (כלומר כל זוג וקטורים שונים בת"ל) אזי $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל.

פתרון: הפרכה. נקח $V = \mathbb{R}^2$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כל שני וקטורים בת"ל, כי אפשר פשוט לראות ששום וקטור הוא לא כפולה בסקלר של וקטור אחר.

אבל שלושת הוקטורים תלויים לינארית כי

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

7. תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n$ וקטורים. אם $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל אזי הוקטורים $v_1, v_2 + v_1, \ldots, v_n + v_1$ גם בת"ל.

פתרון: נסתכל על צירוף מתאפס של הקבוצה:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \alpha_3(v_1 + v_3) + ... + \alpha_n(v_1 + v_n) = 0$$

השאלה: האם המקדמים חייבים להיות 0, או שיש פתרון נוסף?

נסדר את המשוואה:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n)v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

ידוע ש $v_1, ..., v_n$ בת"ל. לכן המקדמים של הצירוף המתאפס שלהם חייבים להיות 0. כלומר,

$$\alpha_1 + ... + \alpha_n = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = 0$$

הפתרון היחיד של מערכת המשוואות הזאת הוא הפתרון הטריוויאלי. כלומר, $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
זה אומר שהקבוצה $v_1, v_2 + v_1, \ldots, v_n + v_1$ בת"ל.

8. תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו A, B תתי קבוצות. הוכיחו/הפירכו:

(א) $span(A)\triangle span(B) \supseteq span\left(A\triangle B\right)$

(ב) $span(A)\triangle span(B) \subseteq span\left(A\triangle B\right)$

פתרון:

א.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, B = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A\triangle B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$span(A\triangle B) = \mathbb{R}^2$$

$$span(A) = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} t \in \mathbb{R}\right\}, span(B) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{R}\right\}$$

ההפרש הסימטרי שלהם הוא האיחוד פחות הוקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
ו$\mathbb{R}^2$ לא מוכל בקבוצה של שני הצירים פחות הראשית.

ב. $span(A) \triangle span(B) \subseteq span\left(A \triangle B\right)$
פתרון:

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}, B = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \in span(A) \triangle span(B)$$

$$A \triangle B = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \notin span(A \triangle B)$$