# אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 6

*מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.*

**שאלה 1**

הוכיחו כי $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2-1\rangle$ איזומורפי ל $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$

**פתרון**

נשים לב שההעתקה $\varphi: \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle \to \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2-1\rangle$ המוגדרת ע"י

$$\varphi\left(0+\langle x^2\rangle\right)=\varphi\left(0+\left\langle (x+1)^2\right\rangle\right)$$

$$\varphi\left(1+\langle x^2\rangle\right)=\varphi\left(1+\left\langle (x+1)^2\right\rangle\right)$$

$$\varphi\left(x+\langle x^2\rangle\right)=\varphi\left(x+1+\left\langle (x+1)^2\right\rangle\right)$$

$$\varphi\left(x+1+\langle x^2\rangle\right)=\varphi\left(x+\left\langle (x+1)^2\right\rangle\right)$$

היא איזומורפיזם

**שאלה 2**

יהי $n$ מספר טבעי ונסמן $\{n^k : k=0,1,2,...\}$ = $S$. נסמן ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ את החוג $S^{-1}\mathbb{Z}$.

א. אם $p$ מספר ראשוני, הוכיחו שאין חוג $R$ המוכל ממש בין $\mathbb{Z}$ ל $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

ב. מה הם האידיאלים ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$?

**פתרון**

א. נניח שקיים חוג $R$ כך ש $\mathbb{Z}\subset R\subset \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$. מכיוון ש $R\subset \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ ומכיל ממש את $\mathbb{Z}$ אז קיים איבר ששייך ל $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ ולא שייך ל $\mathbb{Z}$. ז"א $R$ מכיל איבר מהצורה $\frac{a}{p^m}$ כאשר $0\neq a\in\mathbb{Z}$. מכיוון ש $\mathbb{Z}\subset R$ ו $p^{m-1}\in\mathbb{Z}$ נקבל ש $p^{m-1}\in R$ ולכן $\frac{a}{p}=p^{m-1}\frac{a}{p^m}\in R$. ע"י חיסור או חיבור של כפולה של $p$ מ $a$ נוכל להניח ש $0<a<p$. מכיוון שלכל איבר ב $\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$ יש הפיך, קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש $xa\equiv 1 \bmod p$ ומכאן שקיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש $xa=1+np$ נכפיל את $\frac{a}{p}$ ב $x$ ונקבל $\frac{xa}{p}=\frac{1+np}{p}=\frac{1}{p}+n\in R$ לכן $\frac{1}{p}=\frac{1}{p}+n-n\in R$ ולכן $R=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

ב. האידיאלים של $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$ הם $n\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$ כאשר 7 לא מחלק את $n$.

**<u>שאלה 3</u>**

יהי $R$ חוג קומוטטיבי עם יחידה. עבור שני אידיאלים $I,J$ של $R$ נגדיר $[I:J]=\{x\in R: xJ\subseteq I\}$.

א. הוכיחו שאם $P$ אידיאל ראשוני ו $J$ לא מוכל ב $P$ אז $[P:J]=P$.

ב. יהי $I$ אידיאל, $a\in R$. הוכיחו כי $[I:\langle a\rangle]\subseteq[I:\langle a^2\rangle]$.

**<u>פתרון</u>**

א. מכיוון ש $P$ אידיאל נקבל שאם $x\in P$ אז לכל $y\in R$ $xy\in P$ ובפרט לכל $y\in J$ $xy\in P$ ולכן $xJ\subseteq P$. ז"א $P\subseteq[P:J]$.

נניח ש $x\notin P$ מכיוון ש $J$ לא מוכל ב $P$ קיים $y\in J\setminus P$ מכיוון ש $P$ אידיאל ראשוני $xy\notin P$ ולכן $x\notin[P:J]$.

ב. יהי $x\in[I:\langle a\rangle]$ ז"א $x\langle a\rangle\subseteq I$ ובפרט $xa\in I$. נניח ש $y\in\langle a^2\rangle$ ז"א $y=a^2f$ כאשר $f\in R$.

$xy=x(a^2f)=(xa)(af)\in I$ ולכן $x\langle a^2\rangle\subseteq I$.

**<u>שאלה 4</u>**

יהי F שדה. הוכיחו כי $R=\left\{\begin{pmatrix} c & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}: a,b,c,d\in F\right\}$ הוא חוג מקומי.

**<u>פתרון</u>**

**נשתמש במשפט הבא**:

התנאים הבאים שקולים עבור חוג קומוטטיבי

1. לכל $A,B\in R$, אם $A+B=1$ אזי $A$ הפיך או $B$ הפיך.
2. אוסף האיברים שאינם הפיכים ב $R$ הוא אידיאל.
3. $R$ הוא מקומי.

ז"א מספיק להוכיח שלכל $A,B\in R$, אם $A+B=1$ אזי $A$ הפיך או $B$ הפיך.

תהיי $A\in R$ מטריצה כלשהי ותהיי $B=1-A$ מספיק להראות ש A הפיך או B הפיך.

נניח ש A לא הפיך ונוכיח ש B הפיך. מכיוון ש $A=\begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ אז $|A|=c^3$ מכיוון ש F שדה ו

$c\in F$ אז $c^3=0\leftrightarrow c=0$ הנחנו ש A לא מטריצה הפיכה ולכן $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ואז

$B=\begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ נשים לב ש B הפיכה וההופכית שלה $\begin{pmatrix} 1 & a & ad+b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in R$, ולכן R מקומי.

**<u>שאלה 5</u>**

יהי F שדה. מה הם ההפיכים ב $F[x]/\langle x^n\rangle$ ?

**<u>פתרון</u>**

מהמשפט שרשמנו בתרגיל הקודם נובע שבחוג מקומי לכל איבר $x$ או ש $x$ הפיך או ש $1-x$.

בתרגול ראינו ש $F[x]/\langle x^n\rangle$ הוא חוג מקומי.

מכיוון ש F שדה כל איבר $0\neq a\in F$ הוא הפיך ולכן $a+\langle x^n\rangle$ הפיך ב $F[x]/\langle x^n\rangle$.

איבר מהצורה $\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i+\langle x^n\rangle$ לא הפיך מכיוון ש $\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i+\langle x^n\rangle\right)x^{n-1}=0$ ולכן $1-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i+\langle x^n\rangle$

הפיך ולכן גם $a+\sum_{i=1}^{n-1}b_ix^i+\langle x^n\rangle=\left(a+\langle x^n\rangle\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i+\langle x^n\rangle\right)$ הפיך.

**<u>שאלה 6</u>**

נגדיר העתקה $\tau:R\to S^{-1}R$ ע"י $r\to\frac{r}{1}$. ( $R,S^{-1}R$ כפי שהגדרנו בשיעור)

א. הראה שאיברי $\tau S=\left\{\frac{s}{1}:s\in S\right\}$ הפיכים ב $S^{-1}R$.

נסמן $S^{-1}:=\left\{\frac{1}{s}:s\in S\right\}$, נגדיר את המכפלה של קבוצות $A,B\subseteq R$ ע"י

$A\cdot B=\left\{a_1b_1+....+a_nb_n:a_i\in A,b_i\in B\right\}$.

ב. תהיי $A\subseteq S^{-1}R$ תת קבוצה הסגורה לחיבור ולכפל באיברים של $\tau S$ הראה שהמכפלה בתת קבוצות של $S^{-1}R$ היא קבוצת המכפלות $S^{-1}\cdot A=\left\{\frac{1}{s}\cdot a: s\in S, a\in A\right\}$.

ג. הראה ש $\tau: R\to S^{-1}R$ היא על אם ורק אם כל איברי $S$ הפיכים כבר ב $R$.

**<u>פתרון</u>**

א. איבר היחידה ב $S^{-1}R$ הוא $\frac{1}{1}$. האיבר ההופכי של $\frac{s}{1}$ הוא $\frac{1}{s}$ מכיוון ש $(1,1)\sim(s,s)$.

ב. נובע ישירות מההגדרה של המכפלה של קבוצות.

ג. נניח שההעתקה $\tau: R\to S^{-1}R$ היא על ויהי $x\in S$ אז $\frac{1}{x}\in S^{-1}R$ מכיוון ש $\tau$ על קיים $y\in R$ כך ש $\tau(y)=\frac{1}{x}$. על פי הגדרת $\tau$ נקבל ש $\tau(y)=\frac{y}{1}$ ולכן $(1,y)\sim(x,1)$ ז"א $xy=1$.

נוכיח ש $\tau$ היא על. יהי $\frac{a}{x}\in S^{-1}R$ ז"א $x\in S$. לכל איבר ב $S$ קיים איבר הפיך ב $R$, ולכן קיים $y\in R$ כך ש $xy=1$. $\tau(ay)=\frac{ay}{1}$ כעת $ayx=a$ ולכן $(x,a)\sim(1,ay)$.