תורת הקבוצות תרגיל בית 7

1. הגדר ברקורסיה את הפו': $f(\alpha)=\beta\alpha$ עבור $\beta\neq 0$ נתון.

פתרון:
נגדיר: $f(0)=0$
$f(\alpha+1)=f(\alpha)+\beta$
עבור α גבולי, $f(\alpha)=\sup\{f(\gamma):\gamma<1\}$
נוכיח שאכן לכל α מתקבל ש $f(\alpha)=\beta\alpha$.
עבור $\alpha=0$: $f(0)=0=\beta\cdot 0$.
נניח ש $f(\alpha)=\beta\alpha$. אזי, $f(\alpha+1)=\beta\alpha+\beta=\beta(\alpha+1)$.
נניח שα גבולי, ולכל $\gamma<\alpha$ מתקיים $f(\gamma)=\beta\gamma$.
אזי, $f(\alpha)=\sup\{\beta\gamma:\gamma<\alpha\}=\beta\alpha$.

2. . הוכח באינדוקציה טרנספיניטית שלכל סודר $\omega<\alpha$ יש β גבולי יחיד, ו$n\in\mathbb{N}$ יחיד כך ש: $\alpha=\beta+n$.

פתרון:
עבור $\omega+1$ נקח $\beta=\omega, n=1$.
זאת ההצגה היחידה, כי אם נקח $\omega<\beta$, אז $\beta+n>\omega+1$.
ואם נקח $\omega+n$ עבור $n>1$, אז שוב נקבל סודר גדול יותר.
נניח נכונות לα ונוכיח ל$\alpha+1$. $\alpha+1=(\beta+n)+1=\beta+(n+1)$.
יחידות: נניח ש $\alpha+1=\beta_1+n=\beta_2+m$.
ידוע שאם $s(\delta_1)=s(\delta_2)$, אז $\delta_1=\delta_2$.
לכן, $\alpha=\beta_1+(n-1)=\beta_2+(m-1)$.
מהיחידות עבור α, נקבל $\beta_1=\beta_2$ ו $n-1=m-1$, ולכן $n=m$.
אם α סודר גבולי, נקח $\beta=\alpha$, ו$n=0$.
יחידות: אם $\beta_1=\beta_2+n$ אז $n=0$, מכיוון ש β_1 גבולי. ונקבל $\beta_1=\beta_2$.

3. יהי β סודר אינסופי ו $h:\beta\to\beta$ כך שלכל $\alpha\in\beta$ $h(\alpha)\in\alpha$.
נגדיר ברקורסיה פו': β : $f:\beta\to\beta$ ע"י

$$f(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{7} & \alpha=0\\ 5(f(h(\alpha)))^3 & \alpha>0\end{cases}$$

הוכיחו שלכל $\alpha<\beta$ מתקיים $0<f(\alpha)<1$.

פתרון:

נוכיח יותר מזה. נראה שלכל α, $f(\alpha) \leq \frac{1}{7}$.
עבור $\alpha = 0$ נתון.
יהי סודר α. נניח שלכל $\beta < \alpha$ זה מתקיים. בפרט, עבור $h(\alpha)$, נקבל $f(h(\alpha)) \leq \frac{1}{7}$.
לכן, $f(\alpha) = 5(f(h(\alpha)))^3 \leq 5(\frac{1}{7})^3 \leq \frac{1}{7}$.
כעת, נראה ש $f(\alpha) > 0$.
עבור $\alpha = 0$, נתון.
נניח נכונות לכל $\beta < \alpha$. בפרט, נכון עבור $h(\alpha)$.
אזי, $f(\alpha) = 5(f(h(\alpha)))^3 > 5 \cdot 0 = 0$.

4. הוכח שההגדרה הבאה לזוג סדור אינה טובה: $< a, b >= \{a, \{b\}\}$.(לא מתקיימת תכונת הזוג הסדור)

פתרון:
נקבל ש $< \{1\}, 2 >= \{\{1\}, \{2\}\} =< \{2\}, 1 >$.
אבל, $\{1\} \neq \{2\}$.

5. הוכיחו שאוסף כל הקבוצות מגודל 1 אינו קבוצה.

פתרון: נסמן בA את אוסף כל הקבוצות מגודל 1. אם A קבוצה, אז מאקסיומת הזיווג גם $\{A\}$ קבוצה, והיא מגודל 1. נקבל ש $A \in \{A\} \in A$. ראינו בתרגול שמצב כזה לא אפשרי.

6. יהיו A, B קבוצות, וR יחס מA לB. (תזכורת: יחס מA לB הינו תת קבוצה של $A \times B$)
הוכיחו שהבאים הינם קבוצות:
א. $dom(R)$
ב. $Im(R)$

פתרון:
א. $dom(R) = \{a \in A : \exists b \in B : (a, b) \in R\}$. זאת קבוצה מאקסיומת ההפרדה על A.
ב. $Im(R) = \{b \in B : \exists a \in A : (a, b) \in R\}$. זאת קבוצה מאקסיומת ההפרדה על B.

7. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו שA^B כלומר, אוסף כל הפו' מA לB הוא קבוצה.
פתרון:
נשים לב ש

$$A^B = \{R : dom(R) = A \wedge (a, b), (a, c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

קבוצת כל היחסים החד ערכיים והשלמים מA לB.כלומר,

$$A^B = \{R \subseteq A \times B : dom(R) = A \wedge (a, b), (a, c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

$\Downarrow$

$$A^B = \{R \in P(A \times B) : dom(R) = A \wedge (a,b),(a,c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

אם AוB קבוצות, אז ראינו בתרגול ש $A \times B$ קבוצה. לכן מאקסיומת קבוצת החזקה גם $P(A \times B)$ קבוצה. ואז מהפרדה על $P(A \times B)$ נקבל ש A^B קבוצה.

.