פיתרונות לתרגיל מספר 6

תשובה 1:

א. $\mathbb{A}_\Omega$ סיגמא-אלגברה. קיימת $A \subseteq \Omega \neq \emptyset$ לכן האוסף אינו ריק. $A \subseteq \Omega$ תת-קבוצה אזי $A^C = A - \Omega$ תת-קבוצה . כמו כן אם $\{A_i\}_{i \in I}$ $\Omega \supseteq A_i$ אזי $\bigcup_{i \in I} \mathrm{A_i} \subseteq \Omega$.

ב. וגם (ג):

- האוסף $\mathbb{A}_E$ אינו קבוצה ריקה מכיוון ש־ $E \subseteq \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה. רואים את זה על ידי: אם $A \in \mathbb{A}_E$ אז הקבוצה A היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\overline{A}$ היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\overline{A} \in \mathbb{A}_E$. ואם יש לנו אוסף של קבוצות $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}_E$ אזי האוסף $\{A_i\}_{i \in I}$ מוכל בכל אחת מ־ σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\sum_{i \in I} A_i$ נמצא בכל אחת מ־ σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\sum_{i \in I} A_i \in \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית היחידה שמכילה את E. באמת אם $\mathbb{B}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית שמכילה את E איז $\mathbb{A}_E \subseteq \mathbb{B}_E$ ולפי מינימאליות נקבל שמתקיים $\mathbb{A}_E = \mathbb{B}_E$.

תשובה 2:

א. תמיד מתקיים $a \in X \rightarrow a \in X$ לכן היחס רפלקסיבי. ומאחר ש $a \in X \rightarrow b \in X \rightarrow c \in X$ גורר ש $a \in X \rightarrow c \in X$ היחס הוא גם טרנזיטיבי. נוכיח כי היחס הוא סימטרי. יהיו $a \sim b$ ותהי $X \in \mathbb{A}$ כך ש $b \in X$. נניח בשלילה ש $a \notin X$, אזי $a \in X^C$. מאחר ש $X^C \in \mathbb{A}$ ו- $a \sim b$ נובע ש $b \in X^C$ לכן $b \notin X$ בסתירה להנחה.

ב. נסמן ב- $[a]$ את מחלקת השקילות של איבר a . עבור $X \in \mathbb{A}$ מתקיים $[a] \cap X = [a]$ אם ורק אם $[a] \cap X \neq \emptyset$. אכן, אם קיים $x \in [a] \cap X$ אז עפ"י ההגדרה כל איבר ששקול לו נמצא ב- X לכן $[a] \subseteq X$ הכיוון ההפוך טריוויאלי . מכאן $X = X \cap \Omega = X \cap \bigcup_{a \in \Omega} [a] = \bigcup_{a \in \Omega} [a] \cap X = \bigcup_{a \in \mathrm{X}} [a]$.

ג. לפי (ב) כל $X \in \mathbb{A}$ ניתן להצגה כאיחוד מחלקות השקילות שאינן זרות לו. אם מספר המחלקות בכלל הוא סופי N אזי יש לכל היותר 2^{N} אפשרויות לקבוצות X באלגברה סיגמא . בסתירה להנחה. לכן נוכל לקחת מספר אינסופי בן מניה של מחלקות שקילות שונות $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ובכל אחת איבר $e_i \in E_i$. מאחר ש $E_i \cap E_j = \emptyset$ עבור $i \neq j$ e_i אינו שקול ל- e_j לכן , עפ"י הגדרת ~ נובע שקיימת קבוצה $X_{ij} \in \mathbb{A}$ כך ש $e_i \in X_{ij}$ אבל $e_j \notin X_{ij}$. ניקח $A_i = \bigcap_{i \neq j} X_{ij}$. ברור ש $A_i \in \mathbb{A}$ כחיתוך בן מניה של קבוצות בסיגמא אלגברה, ומקיימת את התכונה הנדרשת.

ד. מגדירים פונקציה $\wp(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{A}$ ע"י $N \longmapsto \bigcup_{n \in N} A_n$. פונקציה זו חח"ע שכן אם $N_0 \neq N_1$ אזי קיים טבעי n כך ש $n \in N_0$ אבל $n \notin N_1$ לכן לפי התכונה של משפחת הקבוצות שבנינו קיים איבר $e_n \in A_n$ ששייך לתמונה של N_0 אך אינו בתמונה של N_1.

ה. מאחר וההעתקה שלעיל היא חח"ע מתקיים ש $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = |\wp(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{A}|$ לכן $\mathbb{A}$ אינה בת-מניה.

<u>תשובה 3:</u>

יהי $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ מרחב הסתברות. להלן הוכחה לקבוצה גדולה יותר של תכונות מאשר נתבקשתם:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. לכל $A \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. אם $A, B \in \mathbb{A}$ ו־ $B \subset A$ אזי $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
4. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.
5. אם $A, B \in \mathbb{A}$ ו־ $B \subset A$ אזי $P(B) \leq P(A)$ (מונוטוניות של ההסתברות).
6. לכל $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ מתקיים $P\left(\sum_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i)$.
7. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
8. (א) אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ כזאת ש־ $A_i \subset A_{i+1}$ אזי $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
(ב) אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ כזאת ש־ $A_{i+1} \subset A_i$ אזי $P\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

<u>הוכחות:</u>

1. $\Omega, \emptyset$ שתי קבוצות זרות לכן לפי אקסיומה (2) מתקיים

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0.$$

2. $A, \overline{A}$ שתי קבוצות זרות אזי

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. $B \subset A$ ו־ $A - B, B$ שתי קבוצות זרות, אזי

$$P(A) = P(B + (A - B)) = P(B) + P(A - B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B).$$

4. $A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + (A - B)$ אזי $P(A) = P(AB) + P(A - B)$, לכן $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

5. אם $B \subset A$ אזי מכיון ש־ $P(E) \geq 0$ לכל E נקבל ש־ $P(A) = P(B) + P(A-B) \geq P(B)$.

6. קל להראות ש־

$$\sum_{i \in I} A_i = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - (A_1 + A_2)) + \ldots = A_1 + \sum_{i \in I, i > 1} \left(A_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j \right).$$

היתרון בביטוי האחרון שקיבלנו הוא שכל המאורעות הן קבוצות זרות בזוגות זה לזה. ולכן לפי אקסיומה (2) ותכונה 5 נקבל

$$P\left(\sum_{i \in I} Ai\right) = P(A_1) + \sum_{i \in I, i>1} P\left(A_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

7. מעובדה ש־ $A + B = A + (B - A)$ ולפי אקסיומה 2 ותכונה 4 מקבלים

$$P(A+B) = P(B + (A-B)) = P(B) + P(A-B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

8. (א) עבור כל n (סופי) מתקיים $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_n)$. לכן, על פי תכונה (5) נקבל $P(A_n)$ סדרה מונוטונית לא יורדת וחסומה על ידי 1, אז היא מתכנסת ונקבל

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

(ב) אנו יודעים ש־ $A_{i+1} \subset A_i$ לכל $i \in I$. אזי $\overline{A_i} \subset \overline{A_{i+1}}$ לכל $i \in I$. לכן,

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right)}\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

<u>תשובה 4:</u>

הקבוצה הראשונה שהוא הגדיר אינה סיגמא אלגברה אם Y אינה בסיגמא אלגברה שכן אם Y אינה בסיגמא אלגברה אז $A^c \cap Y$ אינה באלגברה שכן אם היתה אז $A \cup (A^c \cap Y) = (A \cup A^c) \cap$ $Y = (A \cup Y)$ לכן גם Y היתה צריכה ליהיות באלגברה. אי לכך המשלימה של A ב-Y אינה נמצאת באוסף לכן זוהי אינה סיגמא אלגברה על Y. כמובן שאם $Y \in \mathbb{A}$ הטיעון האחרון לא יתקיים ותיהיה בידינו סיגמא אלגברה.

הקבוצה השניה היא סיגמא אלגברה:

נסמן $A_Y = \{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$

$Y \cap X = Y \in A_Y$ כי $X \in \mathbb{A}$. אם $B \in A_Y$ אזי $B = A \cap Y$ עבור $A \in \mathbb{A}$ אזי $Y - B = (X - A) \cap Y \in A_Y$. בלסוף אם $B_i \in A_Y$ עם $B_i = A_i \cap Y$ אזי $\cup_i B_i = \cup_i A_i \cap Y = (\cup_i A_i) \cap Y \in A_Y$.

נעבור לסעיף ב. הוכחנו לעיל ש $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$ היא אכן סיגמא אלגברה על B.

לכן נותר להוכיח ש $P_B\colon \mathbb{A}_B \to [0,1]$ מקיימת את אקסימות פונקצית ההסתברות.

(א) $0 \le P_B(F) = \frac{P(AB)}{P(B)} \le 1$.

(ב) $P_B(B) = \frac{P(B\cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

(ג) אם $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}_B$ כמשפחה זרה של קבוצות אזי $(F_i = A_i \cdot B)$ עם $A_i \in \mathbb{A}$, ולכן

$$P_B(\sum F_i) = \frac{P(\sum A_i B)}{P(B)} = \frac{\sum P(A_i B)}{P(B)} = \sum P_B(F_i).$$

__תשובה 5:__

א.האינטגרל צריך ליהיות 1:

(אפשר גם לפי חישובי שטחים של משולש + שני מלבנים):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 2xdx + \int_{1/2}^{1} dx + \int_1^2 cdx = x^2\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2} + c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

ב.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a^2 & 0 \le a < 1/2 \\ 1/4 + (a - 1/2) & 1/2 \le a < 1 \\ 1/4 + 1/2 + (a-1)1/4 & 1 \le a < 2 \\ 1 & 2 \le a \end{cases}$$

ג. $P(1/3 < X < 3/4) = F_X(3/4) - F_X(1/3) = 1/4 + (3/4 - 1/2) - (1/3)^2 = \frac{7}{18}$

ד. תוחלת של X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^{1/2} 2x^2dx + \int_{1/2}^{1} xdx + \int_1^2 \frac{1}{4}xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{x^2}{8}\Big|_1^2 = \frac{25}{24}$$

תשובה 6:

א.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} c\cdot\cos x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c\cdot\cos x dx=c\cdot\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=c\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=c\left[1-(-1)\right]=2c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

ב.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X u du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos u du=\frac{1}{2}\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{1}{2}\left[\sin x-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

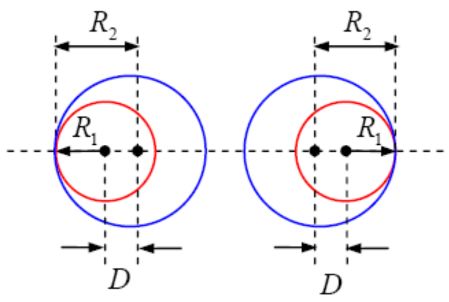
$$=\frac{1}{2}\left[\sin x+1\right]$$

ולכן

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\left[\sin x+1\right] & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

תשובה 7:

הציור מראה כי את ההסתברות הדרושה אפשר לכתוב בצורה



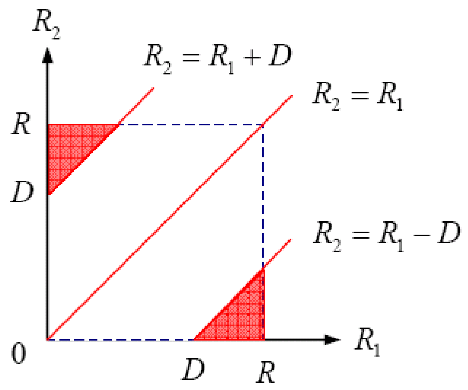
$$P_0 = P(D \le R_2 - R_1 / R_2 > R_1)P(R_2 > R_1)$$
$$+ P(D \le R_1 - R_2 / R_1 > R_2)P(R_1 > R_2)$$

מכאן ניתן לראות כי

$$.P_0 = P(D \le |R_2 - R_1|)$$

כיוון ש— $R_1 \sim U(0,R)$ ו— $R_2 \sim U(0,R)$, מותר להשתמש בגישה הקלאסית להסתברות.

- עבור $0 \le D \le R$ מתקיים:



$$P_0 = \frac{|\{D \le |R_2 - R_1|\}|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(R-D)^2}{R^2}$$
$$= \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2.$$

- עבור $D > R$, ההסתברות $P_0 = 0$ כך שהתשובה הסופית היא

$$.P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \Theta(R - D)$$

באשר

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

<u>תשובה 8:</u>

$X \in [0,20]$

נחלק לשני מאורעות:

או שמספיקים לרכבת של 07:15, זאת אומרת ש X בין 0 לבין 5, או שמגיעים לרכבת של 07:30, זאת אומרת ש X בין 5 לבין 20.

$P(X \le 5) = F_X(5)$

עבור ערכי Y שבין 0 ל – 5 , ישנן שתי אפשרויות – או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת הראשונה (של ורבע) או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת השניה (של וחצי)

$$P(Y \le y) = P(X \in [5-y,5]) + P(X \in [20-y,20]) = F_X(5) – F_X(5-y) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

עבור ערכי Y שגדולים מ – 5, הם יכולים להתקבל רק אם נגיע לרכבת השניה (של וחצי), הסיכוי שנמתין לפחות y>5 דקות הוא הסיכוי להספיק לרכבת הראשונה (שכן אז נמתין פחות מ – y דקות), ועוד הסיכוי להמתין לפחות y דקות לרכבת השניה:

$$P(Y \le y) = P(X \in [0, 5] + P(X \in [20-y,20])) = F_X(5) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

ונגזור על-מנת לקבל צפיפות:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(5-y) + f_X(20-y) & 0 \le y \le 5 \\ f_X(20-y) & 5 \le y \le 15 \\ 0 & else \end{cases}$$