הרצאה 15

נכתב על ידי נועם יערי

01.05.2016

דוגמה

$$(\mathbb{R}, B_{\text{סיגמה אלגברה של בורל}}, P)$$

נוצרת על ידי הקטעים (a,∞).

מ"מ $X:\Omega \to \mathbb{R}$ כך ש - $\{w | X(w) \geq a\} \in \mathcal{F}$.

יש משמעות ל - $P(X \geq a)$ (לכל a).

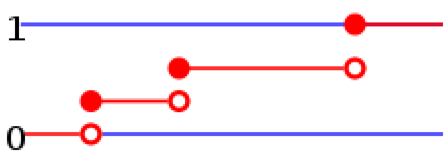
הגדרנו עבור משתנה מקרי X את פונקציית ההצטברות $F_X(a) = P(X \geq a)$

פונקציית הצטברות

פונקציית הצטברות (תזכורת):

- רציפה מימין
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- מונוטונית עולה

פונקציית הצטברות למרחב הסתברות בדיד נראית כמו פונקציית מדרגות.



בפרט,

$$P(X = x) = F_X(x) - \lim_{t\to x^-} F_X(t)$$

בסך הכל:

למשתנה מקרי יש פונקציית הצטברות רציפה $\Leftrightarrow \forall x: P(X = x) = 0$.

מצבים אפשריים

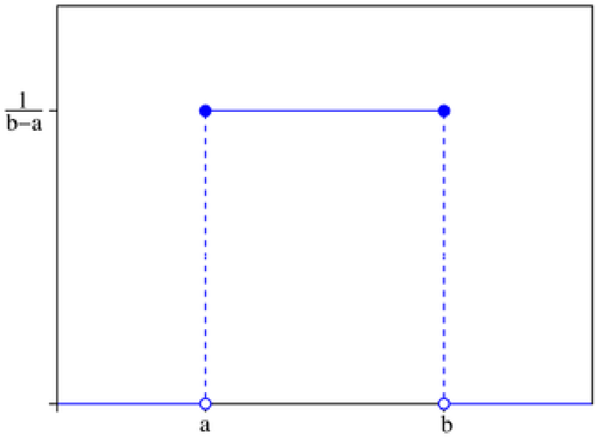
כללי ביותר: $F_X()$. (נובע מרציף)

רציף: $F_X()$ רציפה. (נובע מגזיר).

גזיר: $F_X()$ גזירה.

כאשר F_X גזירה אפשר לתאר אותה על ידי $f(x) = F_X{}'$. f_x היא חיובית ובעלת אינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)dt = 1$$



$$\Rightarrow F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt$$

התפלגויות חשובות

1. ההתפלגות האחידה.

אם $X\sim U[a,b]$

$$P(X \le t) = \begin{cases} 0, & t \le a \\ \dfrac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b \\ 1, & b \le t \end{cases}$$

לדוגמה $X\sim u[0,1]$ = ההתפלגות האחידה הסטנדרטית

התפלגות משותפת של שני משתנים מקריים רציפים

רוצים לתאר את ההתפלגות של שני משתנים מקריים X, Y.

הגדרה

פונקציית צפיפות דו מימדית היא $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

כך ש - $0 \le f(X,Y)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy = 1$$

בחישוב האינטגרל הכפול מחשבים בהתחלה את מה שבסוגריים ומתייחסים ל- y כקבוע ואחר כך אותו דבר עם dy.

חישוב הסתברויות:

$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$.

דוגמה טריוויאלית

$X,Y\sim U[0,1]$ בלתי תלויים.

פונקציית הצפיפות של X:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

הגדרה

משתנים מקריים רציפים הם בלתי תלויים אם $P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$.

הערה

ההגדרות "לכל A,B ב $\sigma -$ אגברה" ו"לכל שני קטעים A,B" שקולות.

דוגמה

נניח ש - X,Y משתנים מקריים בעלי צפיפויות f_X,f_Y. הפונקציה $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ היא פונקציית צפיפות דו מימדית המתאימה למצב שבו X,Y בלתי תלויים.

<u>הוכחה שזו פונקציית צפיפות:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(y)dx\right)dy=_{y\text{ סקלר}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_Y(y)\cdot\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx\right)}_{=1}\right)dy=1$$

<u>הוכחה שהמשתנים ש - $f_{X,Y}$ מתארת הם בלתי תלויים</u>

$$P(c\le Y\le d\,,a\le X\le b)=\int_c^d\left(\int_a^b f_X(x)f_Y(y)dx\right)dy$$

$$=\int_c^d f_Y(y)dy\cdot\int_a^b f_X(x)dx=$$

$$=P(c\le Y\le d)\cdot P(a\le X\le b)$$

<u>התוחלת של משתנה מקרי רציף:</u>

X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)xdx$$

טענה

נניח ש - $f_{X,Y}$ היא פונקציית הצפיפות המשותפת של X,Y

דוגמה

אוטובוס יוצא לדרך כל T דקות. זמן ההמתנה לאוטובוס הוא משתנה מקרי $X \sim U[0,T]$.

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^T \frac{1}{T} \cdot t dt = \frac{T}{2}$$

דוגמה

מחכים לראשון מבין שני אוטובוסים, $X_1, X_2 \sim U[0,T]$ בלתי תלויים.

Y_1 זמן ההמתנה לראשון $= \min(X_1, X_2)$

$Y_2 = \max(X_1, X_2)$. השאלה היא מה התוחלת של Y_1.

נחשב את הצפיפות.

נחשב את פונקציית ההצטברות של Y_1.

$$F_{Y_1}(t) = P(Y_1 \le t) = P(\min(X_1, X_2) \le t) = 1 - P(\min(X_1, X_2) \ge t) =$$

$$= 1 - P(X_1, X_2 \ge t) = 1 - P(X_1 \ge t) \cdot P(X_2 \ge t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 = \frac{2t}{T} - \frac{t^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow f_{Y_1}(t)' = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{T} - \frac{t^2}{T^2}\right) = \frac{2}{T} - \frac{2t}{T^2} = \frac{2}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$E(Y_1) = \int_0^T \frac{2}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right) t dt = T - \frac{2}{3}T = \frac{1}{3}T$$

$$E(Y_2) = ?$$

$$Y_1 + Y_2 = X_1 + X_2$$

$$\Rightarrow E(Y_1) + E(Y_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$\Rightarrow E(Y_2) = \frac{2}{3}T$$

סטטיסטיי הסדר

נניח ש - $X_1, \cdots X_n$ משתנים מקריים. מגדירים משתנים מקריים $Y_1, \cdots, Y_n$ כך ש -

$$\{Y_1, \cdots, Y_n\} = \{X_1, \cdots, X_n\}$$

$$min = Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n = max.$$

עבודת הדוקטורט של ניקולס ברנולי ה – I, 1709 :

$$X_1, \cdots, X_n \sim U[0,1]$$

$$E(Y_n)=?$$

נניח ש X_i – בלתי תלויים עם צפיפות f_X והצטברות F_X. נחשב את הצפיפות של Y_K.

$$P(Y_K\le t)=\sum_{\substack{A\subseteq\{1,\cdots,n\}\\ k\le|A|}}P\begin{pmatrix}Xi\le t, & i\in A\\ t\le X_i & i\notin A\end{pmatrix}=\sum_A F_X(t)^{|A|}\cdot\left(1-F_X(t)\right)^{n-|A|}=$$

$$=\sum_{l=k}^{n}\binom{n}{l}F_X(t)^l\left(1-F_X(t)\right)^{n-l}\Rightarrow f_{Y_k}(t)=F_{Y_K}(t)'=\cdots$$

$$=n\binom{n-1}{k-1}F_X(t)^{k-1}\cdot f(t)\cdot\left(1-F_X(t)\right)^{n-k}$$