תרגול 11

11 אוגוסט, 2016

ספליין קובי ($cubic\ spline$)

נסמן ב- $g_i(x)$ את הפולינום ממעלה 3 המתאים לקטע - $[x_i, x_{i+1}]$. בצורה כללית $g_i(x)$ נראה כך:

$$g_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i\ ,\ [x_i, x_{i+1}]$$

יש 4 נעלמים במשוואה זו ובסה"כ עבור n ספליינים נקבל $4n$ נעלמים.

<u>התנאים לספליין קובי:</u>

1) הספליין עובר דרך כל נק' הדגימה:

$$0 \le i \le n-1: \begin{cases} g_i(x_i) = y_i \\ g_{n-1}(x_n) = y_n \end{cases}$$

2) רציפות בנקודות המעבר בין ספליין לספליין:

עבור $0 \le i \le n-2$ -

$$g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1})$$

3) נגזרת בנק' המעבר רציפה:

עבור $0 \le i \le n-2$ -

$$g_i'(x_{i+1}) = g_{i+1}'(x_{i+1})$$

4) הנגזרת השנייה בנק' המעבר מספליין לספליין תהיה רציפה:

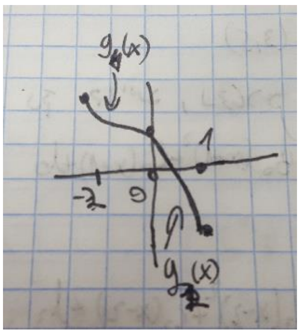
עבור $0 \le i \le n-2$ –

$$g_i''(x_{i+1}) = g_{i+1}''(x_{i+1})$$

<u>דוגמה לספליין קובי:</u>

x	-2	0	1
y	3	1	-1

$$s(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_1(x+2)^3 + b_1(x+2)^2 + c_1(x+2) + d_1\ , & -2 \le x \le 0 \\ g_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2\ , & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



תרגול 11

11 אוגוסט, 2016

<u>בעיה :</u>

נשים לב כי יש לנו בעיה מאחר ויש לנו $4n$ נעלמים אבל רק $n+1+3(n-1)=4n-2$ משוואות.

לכן נמיר את הבעיה במקום למצוא את הנעלמים a_i, b_i, c_i, d_i לכך שנמצא תחילה את s_i , $1 \le i \le n-1$ ולאחר שנמצא את כל ה- s_i נמצא את כל ה - a_i, b_i, c_i, d_i.

נגדיר -

$$\boxed{s_i = g_i''(x_i)}$$

$$\boxed{s_n = g_i''(x_n)}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

ומסימונים אלו נקבל –

$$d_i = y_i$$

$$c_i = \frac{s_i}{2}$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i s_i + h_i s_{i+1}}{6}$$

$$a_i = \frac{s_{i+1} - s_i}{6h_i}$$

<u>ספליין קובי טבעי ($natural\ cubic\ spline$)</u>

עבור הסימונים הנ"ל, בתוספת הדרישה ש-

$$s_0(\text{קצה שמאלי}) = 0$$

$$s_n(\text{קצה ימני}) = 0$$

נוכל לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & . & . & . & . \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & . & . & . \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & . & . \\ & & . & . & . & . \\ & & & . & . & . \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ . \\ \vdots \\ . \\ . \\ s_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= 6 * \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - 1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

כעת יש $4n$ משוואות ב- $4n$ נעלמים ופתרנו את הבעיה.

תרגיל

מצא קירוב $natural\ cubic\ spline$ עבור אוסף הנקודות הבאות -

$$(-1,4), (0,1), (1,2), (2,6), (3,5)$$

פתרון

5 נק' דגימה ונצטרך לבנות 4 ספליינים:

$$g(x) = s(x) = \begin{cases} a_0(x+1)^3 + b_0(x+1)^2 + c_0(x+1) + d_0\,, & -1 \le x \le 0 \\ a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1\,, & 0 \le x \le 1 \\ a_2(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + c_2(x-1) + d_2\,, & 1 \le x \le 2 \\ a_3(x-2)^3 + b_3(x-2)^2 + c_3(x-2) + d_3\,, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

נשים לב כי הנקודות הדגימה במרחקים שווים בציר ה-x ולכן לכל i רלוונטי מתקיים $h_i = 1$.

בנוסף מאחר ואנו משתמשים בשיטת ספליין קובי טבעי נוכל להגיד כי - $s_0 = s_4 = 0$.

נקבל מערכת של s_i:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -30 \end{pmatrix}$$

ומכאן נקבל ש-

$$s_1 = 4.607\,, s_2 = 5.57\,, s_3 = -8.89$$

נקבל שבסה"כ –

$$d_0 = y_0 = 4$$

$$b_0 = \frac{s_0}{2} = 0$$

$$c_0 = \frac{y_1 - y_0}{1} - \frac{2h_0 s_0 + h_0 s_1}{6} = -3 - \frac{s_1}{6} = -3 - \frac{4.607}{6} = -3.7678$$

$$a_0 = \frac{s_1 - s_0}{6 * 1} = \frac{4.607 - 0}{6} = 0.7678$$

נמשיך בדומה עבור כל המשתנים ונציב בחזרה לקבלת הפונקציה $s(x)$.

■

<u>תרגיל</u>

נתונה הפונקציה:

$$s(x) = \begin{cases} 1 - x + ax^2 + x^3\,, & 0 \le x \le 1 \\ 3 + bx + cx^2 - x^3\,, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

מצא את a, b, c כך ש- $s(x)$ יהיה ספליין קובי **<u>טבעי</u>** ב - $[0,2]$.

<u>פתרון</u>

התנאים לקיומו של ספליין -

$$s_0(1) = s_1(1)$$

$$s_0'(1) = s_1'(1)$$

$$s_0''(1) = s_1''(1)$$

ועוד תנאי התחלה לספליין טבעי –

$$s_0''(0) = s_1''(2) = 0$$

נקבל ארבעה משוואות –

$$I)\ a + 1 = 2 + b + c$$

$$II) - 1 + 2a + 3 = b + 2c - 3$$

$$III)\ 2a + 6 = 2c - 6$$

$$IV)\ 2a = 0$$

נקבל ש –

$$a = 0\,, b = -7\,, c = 6$$

■

תרגול 11

11 אוגוסט, 2016

ריבועים מינימליים ($Least\ squares$)

בהינתן $n+1$ נק' דגימה $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ ברצוננו לבנות פולינום ממעלה קטנה ככל האפשר כך ש- $p(x_i)\approx y_i$ כלומר שהנורמה:

$$\left\|p(\vec{x})-\overrightarrow{y(x)}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p(x_i)-y_i)^2}$$

תהיה מינימלית.

ניתן להגדיר את הבעיה באופן הבא:

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}(p(x_i)-y_i)^2$$

דוגמה:

כאשר $p(x)=ax+b$.

כלומר –

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

נגזור לפי a,b:

$$\frac{\partial s}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial b}=2\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$$

ולכן –

$$\sum_{i=0}^{n}ax_i^2+\sum_{i=0}^{n}bx_i=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i$$

$$\sum_{i=0}^{n}ax_i+\sum_{i=0}^{n}b=\sum_{i=0}^{n}y_i$$

תרגול 11

11 אוגוסט, 2016

נעבור לצורה של מערכת משוואות -

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

כעת ניתן לפתור את המערכת ולמצוא את a, b המתאימים.

תרגיל:

נתונות הנקודות -

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1	0.9	1.2	1.5

מצא ישר שהוא הקירוב הטוב ביותר מבחינת ריבועים פחותים/מינימליים לנתוני הטבלה.

פתרון

מהנ"ל -

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

נכפיל ב - A^T (רגורליזציה) -

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

ולכן –

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} x_i^2 & \sum_{i=0}^{3} x_i \\ \sum_{i=0}^{3} x_i & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{3} y_i \end{bmatrix}$$

לכן -

$$\begin{bmatrix} 1.25 & 2.1 \\ 2.1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 4.6 \end{bmatrix}$$

נקבל ש – $a = 1.12\ , b = 0.56$. ולכן –

$$y = 1.12x + 0.56$$

■

<u>הערה:</u>

עבור פולינום ממעלה גבוהה יותר, נניח שנרצה למצוא קירוב לנקודות $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ע"י קירוב לפולינום מסדר 2:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$s^2 = \sum_{i=0}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

נכתוב בצורת מטריצות –

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

נכפיל ב – A^t משמאל –

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

ומכאן נותר למצוא את a, b, c לפי הנקודות הנתונות.