מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה –21/08/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(cos(x))\cdot(e^x-1)}{1-\cos(x^2)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\sin(\cos(x))}_{\to\sin(1)}\cdot\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^4}{1-\cos(x^2)}}_{\to 2}\cdot\frac{x}{x^4}$$

אבל $\frac{1}{x^3}$ שואף מצד אחד לאינסוף ומהצד השני למינוס אינסוף ולכן אין גבול!

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{(x^2)}}{x^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(x^2)}}{x^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to\infty}\right)^x=\{\infty^\infty\}=\infty$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+n^n+n^2}$

$$\sqrt[n]{2^n+n^n+n^2}=\sqrt[n]{n^n\left(\left(\frac{2}{n}\right)^n+1+\frac{n^2}{n^n}\right)}=\underbrace{n}_{\to\infty}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n+1+\frac{n^2}{n^n}}=$$

כיוון ש

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n+1+\frac{n^2}{n^n}}=\left(\left(\frac{2}{n}\right)^n+1+\frac{1}{n^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty+1+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}}=1^0\right\}=1$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2}dx$.

זו פונקציה רציונאלית וכיוון שדרגת המונה שווה לדרגת המכנה, נתחיל בחילוק פולינומים. נעשה זאת עם WIN

$$\frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x+2+x}{x^2+3x+2}=1+\frac{x}{x^2+3x+2}$$

נשים לב כי $\frac{x}{x^2+3x+2}$ אינו שבר חלקי, שהרי המכנה פריק. לכן צריך לפרק לשברים חלקיים

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$x=A(x+2)+B(x+1)$$

נציב $x=-1$

$$-1=A$$

נציב $x=-2$

$$-2=-B\rightarrow B=2$$

סה"כ

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$$

ולכן

$$\int\frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=x+2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_0^1\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

$$\int_0^1\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\lim_{t\to1^-}\int_0^t\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

נחשב את האינטגרל

$$\int_0^t\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\int_0^t\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}dx=\left\{\begin{matrix}u=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\\ du=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}dx\\ -\frac{2}{\pi}du=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{matrix}\right\}=-\frac{2}{\pi}\int_1^{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\frac{1}{u}du=-\frac{2}{\pi}[\ln|u|]_1^{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}=$$

$$-\frac{2}{\pi}\left[\ln\left|\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right|-\ln|1|\right]$$

כעת

$$\int_0^1\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\lim_{t\to1^-}-\frac{2}{\pi}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right|=\left\{-\frac{2}{\pi}\cdot(-\infty)\right\}=\infty$$

לכן האינטגרל אינו מתכנס.

3. יהי $a \in \mathbb{R}$ ונביט בפונקציה $f(x) = \frac{x^2-2x-a}{e^{-x}}$.

מצאו לכל ערך של הפרמטר a כמה שורשים יש לפונקציה $f(x)$, כלומר כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 2x - a = 0$$

הדיסקרימיננטה היא

$$4 + 4a = 4(1 + a)$$

כאשר $1 + a > 0$ שני פתרונות

כאשר $1 + a = 0$ פתרון יחיד

כאשר $a + 1 < 0$ אין פתרונות

4.

א. הוכיחו או הפריכו: קיימת פונקציה $f(x)$ רציפה בכל הממשיים, כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) = |x|$.

תשובה:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

לכן ננחש כי הקדומה היא

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1 & x > 0 \\ ? & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

ננחש כי $C_1 = C_2 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x > 0 \\ ? & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} & x < 0 \end{cases}$$

קל לוודא כי הגבול מימין והגבול משמאל באפס שווים לאפס, ולכן נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} & x < 0 \end{cases}$$

היא אכן רציפה.

קל לראות כי לכל $x \neq 0$ מתקיים כי $f'(x) = |x|$

אבל מה הנגזרת באפס? צריך להשתמש בהגדרת הנגזרת

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

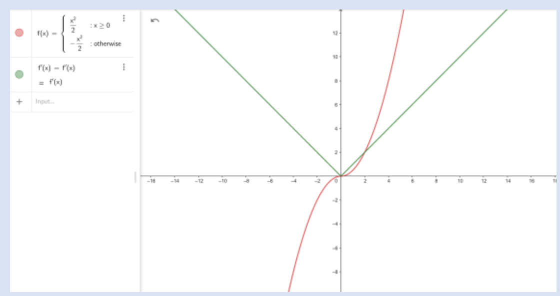
נבדוק את שני הצדדים

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2} = 0$$

באופן דומה

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{2} = 0$$

אכן הפונקציה גזירה באפס והנגזרת שווה אפס משל.



ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת פונקציה $f(x)$ רציפה בכל הממשיים, כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\int_0^x f(t)dt = |x|$.

לפי המשפט היסודי של החדו"א הנגזרת של פונקצית השטח היא הפונקציה עצמה, בהנחה שהפונקציה רציפה.

אבל פונקציה זו אינה גזירה ב$x = 0$ ולכן לא ייתכן שהיא פונקצית השטח בכל הממשיים.

5. נביט בסדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

א. מצאו את a_1 אם נתון כי הסדרה מתכנסת לגבול סופי.

בואו נבדוק את המונוטוניות של הסדרה

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 3$$

אם הסדרה תמיד גדולה מ3, היא עולה, אם קטנה מ3 היא יורדת.

אם שווה ל3 תמיד היא קבועה.

כבר רואים שעבור $a_1 = 3$ הסדרה קבועה ומתכנסת ל3.

רעיון, נקווה שאם $a_1 > 3$ כל הסדרה גדולה מ3

באינדוקציה

בסיס: הנחנו כי $a_1 > 3$

יהי n כך ש $a_n > 3$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 3$ אכן

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 > 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

כלומר אם $a_1 > 3$ הוכחנו כי הסדרה עולה.

__אם__ הסדרה חסומה במקרה זה, יש לה גבול סופי שנסמנו $a_n \to L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - 3$$

$$L = 2L - 3$$

$$L = 3$$

כיוון ש$a_1 > 3$ והסדרה עולה, $L \geq a_1 > 3$ סתירה. לכן במצב זה הפונקציה שואף ל∞.

באופן דומה, אם $a_1 < 3$

יהי n עבורו $a_n < 3$ אזי

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 < 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

כלומר במקרה זה כל הסדרה יורדת.

__אם__ הייתה חסומה, אז $a_n \to L \in \mathbb{R}$ וכיוון שהיא יורדת

$$L \leq a_1 < 3$$

שוב סתירה לכך ש$L = 3$ כפי שהוכחנו לעיל.

סה"כ התכנסות לגבול סופי רק עבור $a_1 = 3$

ב. חשבו את גבול הסדרה כאשר $a_1 = 2$.

הוכחנו בתשובתינו בסעיף הקודם כי $a_n \to -\infty$ במקרה זה (כי אין לה גבול סופי אבל היא יורדת).

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k+n) - \ln(n)}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k+n) - \ln(n)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{2k+n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1 + 2\frac{k}{n}\right)$$

לפי המשפט מהכיתה, כיוון שהפונקציה $f(x) = \ln\,(1+2x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ אזי

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(1+2x)\, dx = \begin{Bmatrix} t = 1+2x \\ dt = 2dx \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^3 \ln(t)\, dt = \begin{Bmatrix} f' = 1 & g = \ln(t) \\ f = t & g' = \frac{1}{t} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(t\ln(t))_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 1dt =$$

$$= \frac{1}{2}(3\ln(3) - 0) - \frac{1}{2}(3-1)$$

ב. קרבו את $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{8}$.

נבחר בפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ ובנקודת ההשקה (הנקודה המצוייה) 0

הנקודה הרצוייה היא $x = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

ננחש $n = 1$

קיימת $0 < c < \frac{1}{2}$ כך ש

$$R = \frac{f''(c)}{2!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 = -\frac{2c}{(1+c^2)^2} \cdot \frac{1}{2^3}$$

אנחנו צריכים

$$|R| \le \frac{1}{8}$$

אכן

$$\left|-\frac{2c}{(1+c^2)^2} \cdot \frac{1}{2^3}\right| = \frac{2|c|}{(1+c^2)^2} \cdot \frac{1}{8} < \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

כלומר קירוב עד $n = 1$ אכן מספיק, צריך לספק אותו

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + 1 \cdot x = x$$

ולכן הקירוב הוא

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$