# תרגיל 7 - המולטינום, הכלה והדחה

**<u>מקדם המולטינום</u>**:

דיברנו בעבר על השאלה הקומבינטורית של סידור $k$ כדורים ל-$n$ תאים $\binom{n+k-1}{n-1}$.

שימו לב שהנחנו שהכדורים הם **זהים**.

מה קורה אם מדובר בכדורים **שונים** זה מזה?

<u>שאלה</u>

ישנם $n$ כדורים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל-$m$ כדים כך שבכד הראשון יהיה $k_1$ כדורים, בכד השני יהיה $k_2$ כדים,.... ובכד ה-$m$י יהיה $k_m$ כדורים?

<u>פתרון</u>

נתחיל מהכד הראשון: נבחר $k_1$ כדורים לשים בו. יש $\binom{n}{k_1}$ אפשרויות.

עכשיו נבחר כדורים לכד השני: יש לבחור $k_2$ כדורים מתוך $n-k_1$ שנשארו. יש $\binom{n-k_1}{k_2}$ אפשריות.

כד שלישי: יש $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ אפשרויות.

$\vdots$

סכ"ה : $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}$ זהו מקדם המולטינום.

בעצם, פגשנו אותו בעבר...

נזכר בשאלה: יש לנו $n$ כדורים, $k_1$ מהם אדומים, $k_2$ מהם ירוקים,..., $k_m$ מהם שחורים.

אמרנו שמספר הדרכים לסדר את כל הכדורים בשורה זה בדיוק $\frac{n!}{k_1!\dots k_m!} = \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}$

לָמה זה דומה? נחשוב על n מקומות שיש לנו לכדורים: _,_,_,.....,_,_,_ כn אובייקטים שונים.

את המקומות מחלקים לm קבוצות: קבוצה אחת בגודל $k_1$ של מקומות לכדורים אדומים

קבוצה שנייה בגודל $k_2$ של מקומות לכדורים ירוקים וכו'...

נוסחת המולטינום:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{1\le t\le m} x_t^{k_t}$$

**תרגילים**

1. מחלקים חפיסת קלפים בין 4 שחקנים באופן שווה. כמה אפשרויות יש לחלוקה?
$\binom{52}{13,13,13,13}$
2. רוצים לחלק כיתה של 11 תלמידים ל4 ועדות: A,B,C,D
   א. כמה דרכים אפשר לחלק אותם כך שב A יהיה תלמיד אחד, ב B יהיו 4, ב C יהיו 4 וב D יהיו 2 תלמידים? $\binom{11}{1,4,4,2}$
   ב. כמה דרכים אפשר לחלק אותם כך שבוועדה מסוימת יהיה תלמיד אחד, בשתי ועדות יהיו 4 ובוועדה הנוספת יהיו 2 תלמידים? פה יש שימוש כפול במולטינום. קודם מחלקים את הילדים אח"כ מחלקים את הועדות (יש 4 וועדות מחלקים ל3 קבוצות לפי גודל הועדה : קב' אחת של וועדות עם תלמיד אחד- בקב' זו תהיה רק וועדה אחת $k_1=1$ , קב' שנייה של וועדות עם 4 תלמידים -בקב' זו יהיו 2 וועדות $k_2=2$ , בקב' השלישית וועדות עם 2 תלמידים- בקב' זו וועדה אחת $k_3=1$)
   ולכן התשובה היא $\binom{4}{1,2,1}\binom{11}{1,4,4,2}$

**הכלה והדחה**

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

ובהכללה:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j\,:\,1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j| + \sum_{i,j,k\,:\,1\le i<j<k\le n} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

## תרגילים

1. כמה מספרים בין 1-1000 מתחלקים ב2,3 או 5?

$$X = \{1, \dots, 1000\}$$
$$A_2 = \{x \in X |\ 2|x\ \}$$
$$A_3 = \{x \in X |\ 3|x\ \}$$
$$A_5 = \{x \in X |\ 5|x\ \}$$
$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$

$$|A_2| = \frac{1000}{2} = 500\ , \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333\ ,\ |A_5| = \frac{1000}{5} = 200\ ,$$
$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166\ ,\ |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100\ ,$$
$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66\ ,\ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

ולכן: $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$

2. מה מס' הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ כאשר $2 \le x_1 \le 5\ , 2 \le x_2 \le 6\ ,\ 2 \le x_3 \le 12$ ?

קודם נשים 2 כדורים בכד הראשון, שני והשלישי. ואז זה כמו לפתור את $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ כאשר $x_1 \le 3\ , x_2 \le 4\ ,\ x_3 \le 10$.

נסמן $\mathrm{X} = \{all\ solutions\}$ , $A_1 = \{sol'\ where\ x_1 \ge 4\}$ ,

$$A_2 = \{sol' where\ x_2 \ge 5\},$$
$$A_3 = \{sol' where\ \ x_3 \ge 11\}$$

אוסף הפתרונות הגרועים הם $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

אנחנו כבר יודעים לומר ש $|A_1| = \binom{23}{20},\ |A_2| = \binom{22}{19},\ |A_3| = \binom{16}{13},$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{18}{15},\ \ |A_1 \cap A_3| = \binom{12}{9}\ , \qquad |A_2 \cap A_3| = \binom{11}{8},$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{7}{4}$$

ולכן מס' הפתרונות הטובים הוא:

$$|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \binom{27}{24} - \left[\binom{23}{20} + \binom{22}{19} + \binom{16}{13} - \binom{18}{15} - \binom{12}{9} - \binom{11}{8} + \binom{7}{4}\right]$$