תזכורת

כל תמורה בS_n ניתן לכתוב כמכפלת חילופים.

$$(a_1, a_2, ...a_n) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) ... (a_1, a_2)$$

דוגמה: $(1,5,4,3,2) = (1,2)(1,3)(1,4)(1,5)$

מסקנה

$$S_n = \langle a_i, a_j : 0 \le i < j \le n \rangle$$

הגדרה

בהינתן תמורה σ "היפוך" הו זוג $i < j$ שעבורו מתקיים $\sigma(i) > \sigma(j)$.

דוגמה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

מצאו את ההיפוכים

דרך א

לצייר חץ ממקור לתמונה, ולספור את מספר ההצטלבויות

דרך ב

עוברים על השורה השניה. אם יש מס' בשורה השניה a שגדול ממספר הנמצא מימינו b, אז מתקבל היפוך $\left(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)\right)$

סימון

מס' ההיפוכים בתמורה σ מסומן $\text{Inv}(\sigma)$

הגדרה

סימן של תמורה σ הוא $\text{sign}\sigma = (-1)^{\text{Inv}(\sigma)}$.

- אם $\text{sign}\sigma = 1$ אז σ נקראת זוגית.
- אם $\text{sign}\sigma = -1$ אז σ נקראת אי-זוגית.

תרגיל בית $\text{sign}\sigma = \prod_{j<i} \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$

משפט

$$\text{sign} : S_n \to \{-1,1\} \cong \mathbb{Z}_2$$

אפימורפיזם(עבור $n \geq 2$)(עבור $n=1$ זה הומומורפיזם)

מסקנה

(תמורה זוגית)*(תמורה זוגית)=(תמורה זוגית)

$$\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$$

(אי זוגית)*(זוגית)=(אי זוגית)

סימון

קבוצת התמורות הזוגיות מסומנת A_n

משפט

$$A_n \triangleleft S_n$$

רמז לדרך הוכחה

$$\text{sign}\left(\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau\right) = \text{sign}\left(\tau^{-1}\right) \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) = \text{sign}(\sigma)$$

משפט

מחצית מהתמורות בS_n הן זוגיות(אם $n \geq 2$) ומחצית הן אי זוגיות.

הוכחה

$$S_n / \underbrace{A_n}_{\substack{\| \\ \ker S_n}} \cong \{-1,1\}$$

ישנן שתי מחלקות שמאליות של A_n בS_n, הן A_nו$A_n\sigma$(כאשר σ היא איזושהי תמורה אי זוגית)

- A_n זו קבוצת התמורות הזוגיות
- $A_n\sigma = S_n \backslash A_n$ זו קבוצת התמורות האי זוגיות

ועכשיו $|A_n\sigma| = |A_n|$ ומאידך $A_n \amalg A_n\sigma = S_n$ ולכן $|A_n| + |A_n\sigma| = |S_n| \Leftarrow 2|A_n| = |S_n|$ ובאופן דומה $2|A_n\sigma| = |S_n|$

משפט

A_n נוצרת ע"י מחזורים מאורך 3

הגדרה

מבנה מחזורים של תמורה הוא רשימה הכוללת את אורכי המחזורים המסודרת מהגדול לקטן כאשר מציגים את התמורה כמכפלת מחזורים זרים.

דוגמה

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

מבנה המחזורים שלה הוא 3,2

תרגיל

הראה כי לתמורה ולהופכית שלה יש אותו מבנה מחזורים

פתרון

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & ... & a_{2n_2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{k1} & ... & a_{kn_k} \end{pmatrix}$$

מבנה המחזורים הוא $n_1, n_2, ...n_k$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1n_1} & ... & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n_2} & ... & a_{21} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{kn_k} & ... & a_{k1} \end{pmatrix}$$

וגם פה מבנה המחזורים הוא $n_1, n_2, ...n_k$

הגדרה

G חבורה. $g_1, g_2 \in G$. נאמר כי g_1 צמוד לg_2 אם קיים $x \in G$ כך ש$xg_1x^{-1} = g_2$

הערה

היחס $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1$ צמוד לg_2 הוא יחס שקילות.

הערה

ראינו את ההצמדות משחקות בתת חבורות נורמליות
$G \lhd H \Leftrightarrow G \leq H$ וגם H סגורה להצמדה בכל איבר בG

הגדרה

בהינתן איבר אפשר להסתכל על מחלקת השקילות שלו לפי הצמדה(כלומר קבוצת כל האיברים הצמודים לו). קבוצה זו נקראת מחלקת צמידות.

סימון

$x \in G$,

$$\operatorname{conj}(x) = \left\{ gxg^{-1} : g \in G \right\}$$

משפט

כל תת חבורה נורמלית היא איחוד זר של מחלקות צמידות

"הוכחה"

$$H \lhd G$$

לכל $h \in H$

$$\operatorname{conj}(h) \subseteq H$$

$$\operatorname{conj}(h_1) \cup, \ldots \cup \operatorname{conj}(h_k) = H$$

דוגמה להצמדה

רוצה להצמיד את $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ עם $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \atop \|} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

טענה

אם $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$ וישנה תמורה π, אזי

$$\pi\sigma\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(a_1) & \pi(a_2) & \ldots & \pi(a_k) \end{pmatrix}$$

הוכחה

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}(\pi(a_i)) = \pi \circ \sigma(a_i) = h\pi(a_{i+1})$$

הערה

אם $\sigma = ()\,()\,....$ אז $\pi\sigma\pi^{-1} = \pi\,()\,\pi^{-1}\pi\,()\,\pi^{-1}...\pi\,()\,\pi^{-1}$

טענה

שני מחזורים הם מאותו אורך $\Leftrightarrow$ הם צמודים.

הוכחה

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_k \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} b_1 & ... & b_k \end{pmatrix}$$

ניקח את התמורה π המקיימת

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \longrightarrow & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_k & \longrightarrow & b_k \end{array}$$

וכמו כן $n-k$ האיברים הנותרים בקבוצה $\{1,...n\} \setminus \{a_i\}$ ממופים ל$n-k$ האיברים הנותרים בקבוצה $\{1,...n\} \setminus \{b_i\}$.

$$\pi\sigma_1\pi^{-1} = \sigma_2$$

$$\pi\sigma_1\pi^{-1} = \pi\begin{pmatrix} a_1 & ... & a_k \end{pmatrix}\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(a_1) & ... & \pi(a_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & ... & b_k \end{pmatrix} = \sigma_2$$

משפט

שתי תמורות הן צמודות $\Leftrightarrow$ יש להן את אותו מבנה המחזורים

מסקנה

כל תמורה צמודה להופכית שלה.

הערה

אם מתקיים $\pi\sigma_1\pi^{-1} = \sigma_2$ אז π הוא לאו דווקא יחיד.

תרגיל

נתונות $\begin{array}{c} b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \\ a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$. מצאו את $a^{-1}ba$

פתרון

$$\pi^{-1} = a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\pi = a^{-1} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$a^{-1}ba = \pi b \pi^{-1} = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(5) & \pi(7) & \pi(9)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 7 & 9\end{pmatrix}$$