המשך מערכות מד"ר

הערה

לא תמיד ניתן לעבור ממערכת של n משוואות למד"ר אחת מסדר n.

סיכום פתרון מערכת מד"ר הומוגנית

בהינתן מערכת $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$ עלינו למצוא n פתרונות בת"ל $\vec{y}_1', ...\vec{y}_n'$, והפתרון הכללי יהיה צירוף לינארי של הפתרונות האלו. $\vec{y} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + ... + C_n\vec{y}_n$.

$\vec{y}_1, ...\vec{y}_n$ בת"ל אם $0 \neq W = \det(Y) = \det\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{y}_1, & \vec{y}_2, & ... & \vec{y}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ (Y מטריצה יסודית).

דרך נוספת לכתוב את הפתרון הכללי הוא $\boxed{\vec{y} = Y\vec{C}}$ כאשר $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ $\vec{C}$ וקטור עמודה של n קבועים חופשיים.

במקרה האי הומוגני מחפשים פתרון מהצורה $\vec{y}_1 = A\vec{y} + b$:

$$\vec{y} = Y(t)\vec{C}(t)$$

$$\vec{y}' = \underbrace{Y'(t)}_{=A(t)}\vec{C}(t) + Y(t)\vec{C}'(t) = AY\vec{C} + Y\vec{C}'$$

מצד שני

$$A\vec{y} + \vec{b} = \boxed{A(t)Y(t)\vec{C} + \vec{b}(t)}$$

כדי לפתור נצטרך

$$Y(t)\vec{C}(t) = \vec{b}(t)$$

נכפיל ב-Y^{-1} משמאל:

$$\vec{C}'(t) = Y^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

$$C(t) = \int Y^{-1}(t)b(t)\,dt + \vec{K}$$

כאשר $\vec{K}$ הוא ווקטור של n קבועים $\begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$. הפתרון הוא

$$\vec{y} = Y(t)\vec{C}(t) = Y(t)\left(\vec{K} + \int Y^{-1}(t)b(t)\,dt\right)$$

$$= \underbrace{Y(t)}_{y_c}\vec{K} + \underbrace{Y(t)\int Y^{-1}(t)\,b(t)\,dt}_{y_p}$$

מערכת של מד"ר עם מקדמים קבועים

נניח מערכת הומוגנית כנ"ל(A לא תלויה ב-t, A קבועה):

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

ננחש $\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda t}$ ($\vec{v}$ וקטור קבוע) $\Leftarrow$ $\vec{y}' = \lambda\vec{v}e^{\lambda t}$. מצד שני: $A\vec{y} = A\vec{v}e^{\lambda t}$
מתי $\vec{y}' = A\vec{y}$?

$$A\vec{v}e^{\lambda t} = \lambda\vec{v}e^{\lambda t}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

אם $\vec{v}$ וקטור עצמי של A עם ע"ע λ מצאנו פתרון!

אלגוריתם לפתירת מערכת מד"ר במקדמים קבועים

1. מצא את כל הע"ע של A: $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$
2. עבור כל ע"ע <u>שונה</u> λ_j ישנם מספר מקרים:

מקרה I

λ_j ע"ע ממשי <u>פשוט</u>(מופיע בחזקת 1 במשוואה = ריבוי אלגברי אחד).
נמצא ו"ע $\vec{v}_j$ ששייך לו ונבנה פתרון $\vec{v}_j = \vec{v}_j - e^{\lambda_j t}$

דוגמה

המשוואה המאפיינת היא $\det(\lambda I - A) = 0$ ($\det(\lambda I - A)$ זה הפולינום האופייני/המאפיין)

$$\det\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -3\\ 8 & -6\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-4 & 3\\ -8 & \lambda+6\end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda'(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0, -2$$

<u>נחפש ו"ע עבור $\lambda_1 = 0$</u>:

$$A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)\,\vec{v} = \vec{C}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4a + 3b = 0 \\ -8a + 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{4} b \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} b \\ b \end{pmatrix}$$

ניקח $b = 4$ ונקבל ו"ע $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ולכן פתרון מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{0 \cdot t} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

עבור $\lambda_2 = -2$ מקבלים ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ולכן פתרון $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}}$

הפתרון הכללי הוא

$$\boxed{\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & e^{-2t} \\ 4 & 2e^{-2t} \end{pmatrix}}_{Y} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_{\vec{C}}$$

מקרה II

λ_j ו-λ_{j+1} הם זוג ע"ע מרוכבים צמודים <u>פשוטים</u>. נמצא להם ו"ע מרוכבים צמודים $\vec{v}_j$ ו-$\vec{v}_{j+1} = \overline{\vec{v}_j}$ (בהתאמה).

יש לנו שני פתרונות <u>מרוכבים</u>:

$$\tilde{\vec{y}}_j = \vec{v}_j e^{\lambda_j t}$$

$$\tilde{\vec{v}}_{j+1} = \vec{v}_{j+1} e^{\lambda_{j+1} t} = \overline{\vec{v}_j} e^{\overline{\lambda_j} t} = \overline{\vec{v}_j e^{\lambda_j t}} = \overline{\tilde{\vec{y}}_j}$$

אבל $\tilde{\vec{y}}_j$, $\tilde{\vec{y}}_{j+1}$ מרוכבים! לכן ניקח צ"ל "חכמים" שלהם:

$$\vec{y}_j = \frac{1}{2}\tilde{\vec{y}}_j + \frac{1}{2}\tilde{\vec{y}}_{j+1} = \frac{1}{2}\tilde{\vec{y}}_j + \frac{1}{2}\overline{\tilde{\vec{y}}_j} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\vec{y}}_j + \overline{\tilde{\vec{y}}_j}\right) = \boxed{\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{y}}_j\right)}$$

$$\vec{y}_{j+1} = \frac{1}{2i}\tilde{\vec{y}}_j - \frac{1}{2i}\tilde{\vec{y}}_{j+1} = \frac{\tilde{\vec{y}}_j - \overline{\tilde{\vec{y}}_j}}{2i} = \boxed{\mathrm{Im}\left(\tilde{\vec{y}}_j\right)}$$

דוגמה

פתור $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$

המשוואה המאפיינת היא $\det\left(\lambda I - A = 0\right)$:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$

נפתח לפי שורה ראשונה

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 + 4\right] = 0$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\boxed{\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i}$$

$\lambda_{2,3}$ הם מרוכבים צמודים

עבור $\lambda = 1$

נחפש וקטור עצמי $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$A\vec{v} = 1\vec{v}$$

$$(I-A)\vec{v}=0$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&2\\-3&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$-2a+2c=0\Rightarrow c=a$$

$$-3a-2b=0$$

$$2b=-3a$$

$$b=-\frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\-\frac{3}{2}a\\a\end{pmatrix}$$

ניקח לנוחיותינו $a=2$ ונקבל ו"ע $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. יש לנו פתרון פרטי $e^t\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

עבור $\lambda=1+2i$(אין טעם לטפל גם בצמוד שלו)

$$(\lambda I-A)\vec{v}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}2i&0&0\\-2&2i&2\\-3&-2&2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2ia=0\Rightarrow a=0\\2ib+2c=0\\-2b+2ic=0\end{cases}$$

$$2b=2ic$$

$$b=ic$$

נקבל $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\ic\\c\end{pmatrix}$. ניקח $c=1$ ונקבל ו"ע $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$ ולכן פתרון הוא

$$\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}e^{(1+2i)t}=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}e^{t}e^{2it}=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}e^{t}\mathrm{cis}\left(2t\right)=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}e^{t}\left(\cos2t+i\sin2t\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ie^{t}\cos2t-e^{t}\sin2t\\e^{t}\cos2t+ie^{t}\sin2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-e^{t}\sin2t\\e^{t}\cos2t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\e^{t}\cos2t\\e^{t}\sin2t\end{pmatrix}$$

הפתרון הוא:

$$\vec{y}=C_{1}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}e^{t}+C_{2}\begin{pmatrix}0\\-e^{t}\sin\left(2t\right)\\e^{t}\cos\left(2t\right)\end{pmatrix}+C_{3}\begin{pmatrix}0\\e^{t}\cos\left(2t\right)\\e^{t}\sin\left(2t\right)\end{pmatrix}$$

המטריצה היסודית היא

$$Y=\begin{bmatrix}2e^{t}&0&0\\-3e^{t}&-e^{t}\sin2t&e^{t}\cos2t\\2e^{t}&e^{t}\cos2t&e^{t}\sin t\end{bmatrix}$$

מקרה III

λ_{j} ע"ע לא פשוט(מופיע יותר מפעם אחת) אבל ניתן להוציא ממנו מספיק ו"ע בת"ל.

דוגמה

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{y}$$

יש רק ע"ע אחד ויחיד $\lambda=1$. מהם הו"ע?

$$A\vec{v}\stackrel{?}{=}1\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{v}$$

$$I\vec{v}=\vec{v}$$

לכל $\vec{v}$ ובפרט נוכל לקחת שני ו"ע:

- פתרון $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t}\Leftarrow\vec{v}_{1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
- פתרון $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{t}\Leftarrow\vec{v}_{2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

מקרה IV

ל־λ_j ריבוי אלגברי $m>1$ אבל יש לו פחות מ־m ו"ע(ריבוי גאומטרי$\geq m$). צריכים לחפש פתרון מהצורה

$$e^{\lambda t}\left(\vec{v}_0+\vec{v}_1 t+...+\vec{v}_m t^{m-1}\right)$$

דוגמה

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\vec{y}$$

ע"ע $\lambda=2$ **בלבד!**

ו"ע $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. מקבלים $b=0$, כלומר $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$. ניקח $a=1$

ונקבל ו"ע $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **וזהו!**

נחפש פתרון מהצורה

$$\vec{y}=e^{2t}\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}at+c\\bt+d\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'=e^{2t}\begin{pmatrix}2at+2c+a\\2bt+2d+b\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}2at+2c+bt+d\\2bt+2d\end{pmatrix}$$

$$b=0,a=d$$

מקבלים פתרון נוסף $e^{2t}\begin{pmatrix}at\\a\end{pmatrix}$. ניקח $a=1$ ונקבל $e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}e^{2t}}$$