

תרגיל בית 7 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום). יהיו $f: G \rightarrow H$ ו- $g: H \rightarrow K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f: G \rightarrow K$ היא הומומורפיזם.

שאלה 2. תהיינה G, H חבורות ויהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכיחו: f חח"ע אם ורק אם $\ker f = \{e_G\}$.

שאלה 3. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\text{im } f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_4$.

שאלה 4. יהי p ראשוני. חבורה נקראת חבורת- p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה כלשהי של p .

יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G היא חבורת- p , אז גם $\text{im } f$ היא חבורת- p . הפריכו את הכיוון השני.

שאלה 5. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^{-3}$.

ב. $f: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ג. $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר \mathbb{R}^+ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ד. $f: S_7 \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

ה. $f_x: G \rightarrow G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו- $x \in G$ איבר.

ו. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k], [k])$.

ז. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3, n \bmod 6)$.

ח. $f: S_6 \rightarrow U_7 \times U_{11}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

שאלה 6. תהי G חבורה. נגדיר $f: G \rightarrow G$ לפי $f(g) = g^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

שאלה 7 (ממבחן). תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$ איברים לא טריוויאלים (כלומר שונים מאיבר היחידה) המקיימים $aba^{-1} = b^2$.

א. הוכיחו כי $a^5ba^{-5} = b^{32}$.

ב. נניח כי $o(a) = 5$. מצאו את $o(b)$.

בהצלחה!