מבנים אלגבריים 1 –פתרון תרגיל 3

1. תהי G חבורה, $a,b\in G$. הוכח או הפרך: $o(ab)=o(ba)$.

הוכחה: נסמן $n=o(ab)$, $m=o(ba)$.
נחשב
$$(ab)^m=(ab)(ab)\cdots(ab)=a(ba)(ba)\cdots(ba)b=a(ba)^{m-1}b=$$
$$=a(ba)^{-1}b=aa^{-1}b^{-1}b=e$$
ולכן $n\le m$.
מצד שני:
$$(ba)^n=(ba)\cdots(ba)=b(ab)\cdots(ab)a=$$
$$=b(ab)^{n-1}a=b(ab)^{-1}a=bb^{-1}a^{-1}a=e$$
ולכן $m\le n$.
סך הכל קיבלנו $m=n$.

2. הוכיחו כי בחבורה G , $a^n=e \iff o(a)\mid n$. (רמז: השתמשו בעובדה שקיימים מספרים q,r כך ש- $n=q\cdot o(a)+r$ ו- $0\le r<o(a)$.)

$$:(\Leftarrow)\qquad o(a)\mid n \ \Leftarrow\ :n=o(a)\cdot q \qquad a^n=a^{o(a)\cdot q}=\underbrace{\left(a^{o(a)}\right)}_{e}{}^{q}=e^q=e$$

$$:(\Rightarrow)\qquad a^n=e \ \Rightarrow\ n\ge o(a)\ \Rightarrow\ n=o(a)\cdot q+r\quad 0\le r<o(a)$$

$$a^r=a^{n-o(a)\cdot q}=a^n\cdot\Big(\underbrace{a^{o(a)}}_{e}\Big)^{q}=e^q=e$$ אבל $o(a)$ מינימלי ולכן:

$$r=0\ \rightarrow\ n=o(a)\cdot q\ \rightarrow\ o(a)\mid \mathrm{n}\ .$$

3. הוכיחו כי עבור כל איבר בחבורה $a\in G$ מתקיים $o(a)=|<a>|$.

נסמן $o(a)=n$.
כזכור $<a>=\{a^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
תת-טענה: לכל $0\le i<j<n$ מתקיים $a^i\neq a^j$.
הוכחת תת-טענה: אחרת, $a^i=a^j \Leftarrow a^{j-i}=\mathrm{e}$ אבל $j-i<n$ בסתירה למינימליות של הסדר.

לפי התת-טענה $A=\{1,a,a^2,\dots,a^{n-1}\}$ היא קבוצה בגודל n בדיוק, והיא מוכלת ב $<a>$.

אם כן, $|<a>|\ge n$.

מצד שני, כל $a^k\in<a>$ נמצא בקבוצה זאת. למה? ניתן לרשום $k=q\cdot n+r$ עבור $q,r\in\mathbb{Z}$ וכאשר $0\le r<n$. אזי $a^k=a^r$ וברור ש $a^r\in A$.

4. תהי $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ חבורה אבלית ונגדיר $b=a_1a_2\cdots a_n$.
הוכח:
א. $b^2=e$.

בחבורה לכל איבר יש בדיוק איבר הופכי אחד ולכן קבוצת איברי החבורה שווה לקבוצת ההופכיים. וכיוון שזו חבורה אבלית סדר המכפלה לא משנה ולכן:

$$b=\prod_{i=1}^{n}a_i=\prod_{i=1}^{n}a_i^{-1}$$ ומכאן: $$b^2=a_1a_2\cdots a_n\cdot a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_n^{-1}$$

ומתוך האבליות: $b^2=a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_na_n^{-1}=e\cdot e\cdots e=e$.

ב. אם ב- G אין איבר מסדר 2 אזי $b=e$.

מתוך א: $o(b)\le 2$ ומתוך סגירות: $b\in G$ ונתון שאין איבר ב- G מסדר 2,

ולכן בהכרח: $o(b)=1 \Rightarrow b=e$.

ג. אם ב- G יש איבר יחיד מסדר 2 אז הוא b.

נניח $a_1=e$ ו- a_2 הוא האיבר היחידי מסדר 2 כלומר כך ש: $a_2=a_2^{-1}$.

כיוון שהחבורה היא אבלית סדר מכפלת האיברים לא משנה ולכן נוכל לכתוב את b כמכפלת איברי החבורה המסודרים כ"א ליד ההופכי שלו ונקבל ש:

$$b=ea_2a_3a_3^{-1}a_4a_4^{-1}\cdots a_na_n^{-1}=a_2 .$$

5. בחבורה G נסמן $G^m:=\{g^m \mid g\in G\}$. הוכח שאם G אבלית אז מתקיים: $G^m\le G$.

נוכיח עפ"י הקיצור: א. $e^m=e\in G^m\neq\phi$

ב. $\forall x,y\in G^m:\exists x_1,y_1\in G \mid x=x_1{}^m,\ y=y_1{}^m$

מתוך האבליות: $$\Rightarrow\ x\cdot y^{-1}=x_1\cdot y_1{}^{-m}=x_1{}^m\cdot\left(y_1^{-1}\right)^m \underbrace{=}_{x_1y_1^{-1}=y_1^{-1}x_1}\left(x_1y_1^{-1}\right)^m\in G^m$$

6. קבעו האם התתי-קבוצות הבאות הן תתי חבורות:

a. $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| ab \neq 0\right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$

הוכחתם בתרגיל הראשון שזו חבורה, ולכן ברור שזו ת"ח.

b. $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| ab \neq 0\right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$

אין סגירות לכפל- ולכן זו לא ת"ח.

c. $5\mathbb{Z}_{10} = \{5k | k \in \mathbb{Z}_{10}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

נסמן את הקבוצה בH. קל לראות ש $0 \in H$ ולכן זו לא קבוצה ריקה.
נניח $5k_1, 5k_2 \in H$ אזי $5k_1 - 5k_2 = 5(k_1 - k_2) \in H$. ולכן זו ת"ח.
למעשה, $H =< 5 >$.

d. $5U_{10} = \{5k | k \in U_{10}\}$

נסמן את הקבוצה H. אם H הייתה תת-חבורה אז בהכרח $1 \in H$ כלומר שיש $k \in U_{10}$ כך ש $5k \equiv 1(mod 10)$. מה שאומר ש 5 הוא הפיך ב $\mathbb{Z}_{10}$ - וזה לא נכון! (שכן הוא לא זר ל10).
*-אפשר גם לראות שקבוצה זו לא מוכלת בU_{10} ולכן בודאי לא תת-קבוצה שלו.

e. kU_n כאשר $k|n$.

באופן דומה לסעיף הקודם, k לא הפיך ולכן הקבוצה לא מכילה את 1 ולכן לא ת"ח.

f. kU_n כאשר $(k,n) = 1$.

הפעם k הפיך ולכן $1 \in kU_n$.
נראה שבעצם $kU_{10} = U_{10}$. יהי $x \in U_{10}$ אזי $x = kk^{-1}x = k(k^{-1}x) \in kU_{10}$.
ולכן $kU_{10} = U_{10}$ ובפרט זו ת"ח (אם כי טריוויאלית).

g. $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} |$ על וחח"ע $f(0) = 0\} \subset \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} |$ על וחח"ע$\}$ (ביחס לפעולת ההרכבה).

נסמן את הקבוצה K. קל לראות ש $Id \in K$.
יהיו $f, g \in K$ אזי $f(0) = g(0) = 0$. נשים לב שהן הפיכות והפונקציות ההפוכות שלהן גם חייביות לקיים $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = 0$.
אם כן, $(f \circ g^{-1})(0) = f\left(g^{-1}(0)\right) = f(0) = 0$ ולכן $f \circ g^{-1} \in K$.
סך הכל זו ת"ח.

7. נניח H, K תתי חבורות של G. הוכח:

א. אם $H \leq G$ & $K \leq H$ אזי $K \leq G$.

לפי ההגדרה K הוא חבורה ביחס לפעולה של H, שהיא הפעולה של G. ולכן ת"ח של G.

ב. $H \cup K \leq G$ אם ורק אם $K \subset H$ או $H \subset K$.

הכיוון $(\Rightarrow)$ הוא פשוט.

בכיוון השני: נניח בשלילה כי H, K אינן מוכלות האחת בשנייה. אזי:

$$\exists x \in H \mid x \notin K \quad \exists y \in K \mid y \notin H \quad \Rightarrow \quad x, y \in K \cup H \leq G \quad \Rightarrow \quad xy \in K \cup H$$

ולכן: $xy \in H$ או $xy \in K$.

נניח בה"כ: $xy \in K$ $\Leftarrow$ $\exists k \in K \mid xy = k$ $\Leftarrow$ $y = kx^{-1} \in K$ בסתירה לכך ש: $y \notin K$.

ג. $H \cap K \leq G$ (נכון גם עבור אינסוף תתי חבורות).

לפי הקריטריון המקוצר:
$e \in H \cap K$ כי איבר היחידה שייך לכל תת-חבורה (ולכן שייך לK , H).

יהיו $a, b \in H \cap K$ אזי $a, b \in H$ ולכן $ab^{-1} \in H$, וגם $a, b \in K$ ולכן $ab^{-1} \in K$.

סך הכל, $ab^{-1} \in H \cap K$