פתרון שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_2 e_1. הוכיחו:

(א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]
פתרון : מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_1) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1)\phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

(ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.
פתרון : נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

(ג) נגדיר את הגרעין של ϕ להיות $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$. הוכיחו כי הגרעין הוא תת־חבורה של G_1 .
פתרון : בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in ker(\phi)$ אזי

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} = e_2 e_2^{-1} = e_2$$

ולכן $gh^{-1} \in ker(\phi)$

(ד) נגדיר את התמונה של ϕ להיות$Im(\phi) = \{\phi(x) | x \in G_1\}$. הוכיחו כי התמונה היא תת־חבורה של G_2.
פתרון : $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$כאשר $g, h \in G_1$ אזי

$$\phi(g)\phi(h)^{-1} = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוויאלי.

(א) מצאו הומומורפיזם לא טריוויאלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3 .
פתרון : כיוון ש $\mathbb{Z}_3 = \langle 1 \rangle$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $1 \mapsto \sigma$ אזי σ צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1,2,3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1)\phi(1) = (1,2,3)^2 = (1,3,2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכיחו שההומומורפיזם הטריוויאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$.
פתרון : הוכחה: יהא הומו' ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1,2)\,, \sigma_2 = (2,3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $2a = 0$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1,2,3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1,2,3)$ ו $(1,2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל־0 ולכן זהו ההומו' הטריוויאלי.

(ג) יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים, כלומר, שאין להם מחלק משותף פרט ל־1. הוכיחו שלא קיים הומומורפיזם לא טריוויאלי $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$.
פתרון : הוכחה: נניח שיש הומו' $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, אז הוא נקבע ע"י הגדרתו על היוצר. נניח $\phi(1) = a < m$ (קטן מ־m כי ניתן להגדיר נציג כזה). לכן מתקיים: $\phi(n) = na$. אבל $n \equiv 0(\mod n)$ ולכן חייב להתקיים $na = \phi(n) \equiv 0(\mod m)$, כלומר, קיים איזשהו $b \in \mathbb{N}$ כך ש־ $na = mb$. לכן נקבל $b = \frac{na}{m} \in \mathbb{N}$, אם $a \neq 0$ אז מכיון ש־ m לא מחלק את n נקבל $m|a$, ולכן $m \le a$ בסתירה לכך שבחרנו נציג $a < m$. לכן $a = 0$, ו־ϕ הוא ההומו' הטריוויאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכיחו כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$\left(\phi_1 \circ \phi_2\right)(gh) = \phi_1\left(\phi_2(gh)\right) = \phi_1\left(\phi_2(g)\phi_2(h)\right) = \phi_1\left(\phi_2(g)\right)\phi_1\left(\phi_2(h)\right) = \left(\phi_1 \circ \phi_2\right)(g)\left(\phi_1 \circ \phi_2\right)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in Aut(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומו'. הוכחה

$$\left(\phi^{-1}\right)(gh) = \left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕמשני הצדדים)

$$gh = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\right]\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $\forall g \in G:\ I_x(g) = xgx^{-1}$.
הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = \left(I_x \circ I_y\right)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\left(\Phi\right) = \{x \in G:\ I_x = id\} = \left\{x \in G:\ \forall g\ xgx^{-1} = g\right\} = \{x \in G:\ \forall g\ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז $(Center)$ של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$. לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$. הוכיחו ש- ϕ הומומורפיזם ומצאו את הגרעין.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\left(\phi\right)=\{x\in G:\ sign(x)=1\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$$

(ב) ההעתקה $\phi:(\mathbb{C}\backslash\{0\})\to\mathbb{R}_{+}=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ המוגדרת על ידי $\phi(a+ib)=a^2+b^2$. (לדוגמה: $\phi(1+2i)=5$), הוכיחו שהיא הומומורפיזם ומצאו את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

פתרון : נשים לב ש $\phi(z)=|z|^2$ כאשר $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. נמשיך להוכחה:

i. יהיו $z_1,z_2\in G=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1z_2)=\phi(z_1)\phi(z_1)$$

ואכן

$$\phi(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1||z_2|=\phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\left(\phi\right)=\{z\in G:\ |z|=1\}=\left\{e^{i\theta}|\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומומורפיזם $\phi:S_n\to\{-1,1\}$ המוגדר על ידי $\phi(\sigma)=sign(\sigma)$. מצאו את הגרעין של ϕ.

פתרון : נמצא את הגרעין

$$Ker\left(\phi\right)=\{\sigma\in G:\ sign(\sigma)=1\}=A_n$$

5. הוכיחו שהחבורות הבאות לא איזומורפיות:

(א) $(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$.

(ב) $(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$.

(ג) $\mathbb{Z}_2\times S_3,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$.

פתרון :

א. נניח בשלילה שיש איזו' $\varphi:\mathbb{Q}\setminus\{0\}\to\mathbb{Q}$, אזי נקבל ממשפט בהרצאה ש־ $o(\varphi(-1))=o(-1)$, כאשר בחלק השמאלי של שיוויון זה מדובר על החבורה החיבורית, ובימני על החבורה הכפלית. אבל בכפלית הסדר הוא 2, ואילו בחיבורית אינסוף., בסתירה.

ב. בבדידה ראינו (עוצמות) שאין פונקציה חח"ע ועל $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, ובפרט אין הומ' חח"ע ועל.

ג. נניח בשלילה שיש איזו' $\varphi:,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}_2\times S_3$. כיון ש־ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$ אבלית נקבל, לפי משפט מההרצאה, שגם $\mathbb{Z}_2\times S_3$ אבלית בסתירה לכך ש־ $(0,(1,2,3))=(0,(1,3))(0,(1,2))\neq(0,(1,2))(0,(1,3))=(0,(3,2,1))$.

6. נסמן $A=\{1,2,3,4\}$ ונתבונן בחבורה $(P(A),\Delta)$ (קבוצת החזקה עם פעולת ההפרש הסימטרי). ראינו בתרגיל בית שזוהי חבורה.

(א) מצאו את סדרי האיברים ב־$P(A)$.

פתרון :

נשים לב שלכל $X\in P(A)$ מתקיים $X\Delta X=\varnothing$, ו־$\varnothing$ הוא איבר היחידה של חבורה זו. לכן נקבל שכל איבר (חוץ מהיחידה) הוא מסדר 2.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

i. $P(A) \cong \mathbb{Z}_{16}$.

ii. $P(A) \cong (\mathbb{Z}_2)^4$.

פתרון :

א. הפרכה: אם היה איזו' $\varphi : \mathbb{Z}_{16} \to P(A)$, אז מכיון ש־$1 \in \mathbb{Z}_{16}$ הוא מסדר 16, גם תמונתו הייתה כזו, בסתירה לכך שאין איבר מסדר 16 ב־$P(A)$.

ב. הוכחה: נגדיר $\varphi : P(A) \to (\mathbb{Z}_2)^4$ באופן הבא: $\varphi(X) = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ כאשר $i \in X \iff n_i = 1$ (שימו לב ש־$X \subseteq A = \{1,2,3,4\}$).

זה הומ' כי: נסמן: $\varphi(X) = (n_1, n_2, n_3, n_4), \varphi(Y) = (m_1, m_2, m_3, m_4)$. אזי $\varphi(X) + \varphi(Y) = (n_1 + m_1, n_2 + m_2, n_3 + m_3, n_4 + m_4)$, ומתקיים: $i \in X \setminus Y \vee i \in Y \setminus X \iff (n_i = \wedge m_i = 0) \vee (n_i = 0 \wedge m_i = 1) \iff n_i + m_i = 1$ $i \in X \Delta Y$, ולכן נקבל: $\varphi(X \Delta Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$.

הוא הפיך בעזרת מציאת ההופכי $\varphi^{-1} : (\mathbb{Z}_2)^4 \to P(A)$ המוגדר ע"י $\varphi^{-1}((n_1, n_2, n_3, n_4)) = \{i : n_i = 1\}$. נקבל: $\varphi^{-1}(\varphi(X)) = \varphi^{-1}((n_1, n_2, n_3, n_4))$ כאשר $i \in X \iff n_i = 1$, ולפי הגדרת φ^{-1} נקבל בחזרה את X. בנוסף, $\varphi(\varphi^{-1}((n_1, n_2, n_3, n_4)) = \varphi(\{i : n_i = 1\}) = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ (כאשר השיוויון האחרון נובע מהגדרת φ ששמה 1 אם ורק אם כאשר $i \in X$).