תרגול 9:

הגדרה: תהי $f(z)$ אנליטית בטבעת $R_1<|z-z_0|<R_2$, ו- C מעגל ברדיוס $R_1<r<R_2$. ניתן לפתח את $f(z)$ לטור חזקות בטבעת: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ כאשר $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. הטור נקרא טור לורן, והחידוש הוא שמרשים גם חזקות שליליות.

החלק $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ של החזקות השליליות נקרא החלק העיקרי של הטור. והמקדם a_{-1} נקרא השארית של f בנקודה z_0, $\operatorname{Res}(f,z_0)$.

כמה הערות: פיתוח לורן הוא יחיד (כמו טיילור). ניתן להרחיב אותו אל הטבעת הגדולה ביותר בה הפונקציה אנליטית.

סעיף ממבחן:

מצאו טור לורן של $\frac{z-\sin z}{z^3}$ בסביבת $z=0$.

פתרון: יש את הטור הידוע $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{z^3}{3!}+-+...$ המתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$. אם כך $z-\sin z=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+-...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}$. אם $z\neq 0$ מותר לחלק ב- z^3 ולקבל ש- $\frac{z-\sin z}{z^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}z^{2n-2}$. הפיתוח תקף לכל $z\neq 0$, כלומר בטבעת $0<|z|<\infty$.

תרגיל ממבחן:

4. נגדיר $g(z)=\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$.

א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0=2$.

ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א' מתכנס.

ג. [אם נלמד משפט השארית:] חשבו $\oint_{|z|=3} g(z)dz$ [אחרת:] חשבו $\operatorname{Res}_{z=2} g(z)$

פתרון:

א. נרשום $g\left(z\right)=\frac{1}{5-z}\frac{3}{\left(z-2\right)^{2}}$, ונפתח את $\frac{1}{5-z}$ בחזקות של $\left(z-2\right)$. ובכן

$\frac{1}{5-z}=\frac{1}{3-\left(z-2\right)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{3}\right)}$. ניתן לפתח את הביטוי האחרון לטור הנדסי כל עוד

$\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$, כלומר בעיגול $\left|z-2\right|<3$. אם כך $\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-2\right)^{n}}{3^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-2\right)^{n}}{3^{n+1}}$.

ומכאן $g\left(z\right)=\frac{1}{5-z}\frac{3}{\left(z-2\right)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-2\right)^{n}}{3^{n+1}}*\frac{3}{\left(z-2\right)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-2\right)^{n-2}}{3^{n}}$.

ב. פיתוח לורן הנ"ל תקף בטבעת $0<\left|z-2\right|<3$.

ג. השארית $\operatorname{Res}\left(g,2\right)$ היא המקדם של החזקה $\left(z-2\right)^{-1}$. כלומר מדובר במחובר עבורו $n=1$, $\frac{1}{3}\left(z-2\right)^{-1}$. התשובה היא $\operatorname{Res}\left(g,2\right)=\frac{1}{3}$. [אם נלמד משפט השארית האינטגרל הוא $\frac{2\pi i}{3}$]

תרגיל ממבחן:

5. א. חשבו את טור לורן שמתכנס ב- $\mathbb{C}$ פרט לנקודה 0 עבור הפונקציה

$f\left(z\right)=\left(2z^{5}-4z^{2}\right)\sin\left(\frac{1}{z^{2}}\right)$.

ב. חשבו את $\operatorname{Res}\left(f,0\right)$.

פתרון:

א. לכל $w\in\mathbb{C}$ $\sin w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n+1\right)!}w^{2n+1}$ ולכן לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{0\right\}$ $\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n+1\right)!}z^{-2n-1}$.

אם כך $f\left(z\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n+1\right)!}z^{-2n+4}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n+1\right)!}z^{-2n+1}$.

ב. החזקה z^{-1} מתקבלת מהטור השני ע"י הבחירה $n=1$, ורק משם. המקדם הוא

$\operatorname{Res}\left(f,0\right)=\frac{2}{3}=\frac{4}{3!}$.

תרגיל ממבחן:

5. מצאו טור לורן לפונקציה $f\left(z\right)=\frac{z}{\left(z-2\right)^{2}\left(z+1\right)}$ בתחום $1<\left|z\right|<2$.

פתרון:

נשתמש בפירוק לשברים חלקיים: $\frac{z}{(z-2)^2(z+1)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{(z-2)^2}+\frac{C}{z+1}$ מוצאים בקלות

$\frac{z}{(z-2)^2(z+1)}=\frac{1}{9}\frac{1}{z-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+1}$. נפתח את המחוברים בתחום הרלוונטי.

$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ אם $|z|<2$ $\left|z/2\right|<1\Rightarrow |z|<2$. נגזור טור זה לקבל

$-\frac{1}{(z-2)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}\Rightarrow\frac{1}{(z-2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$ הפיתוח הזה נכון גם

הוא בעיגול $|z|<2$. השבר האחרון $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$ עבור

$\left|1/z\right|<1\Rightarrow |z|>1$. נצרף את כל מה שעשינו:

$$\frac{z}{(z-2)^2(z+1)}=\frac{1}{9}\frac{1}{z-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+1)}{3*2^{n+1}}-\frac{1}{9*2^{n+1}}\right]z^n-\frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n$$

והפיתוח עובד בטבעת $1<|z|<2$