תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו-$x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).

ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$.

ג. לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq S$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש-A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו-$A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש-A תת קבוצה סגורה של X.

שאלה 4

א. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה וחח"ע בין מרחבים מטריים, $A\subseteq X$ ו $a\in X$ נקודת הצטברות של A. הוכיחו ש $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב. מצאו דוגמא נגדית לא' כשהפונקציה רציפה אבל אינה חח"ע.

שאלה 5

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת קנטור.

א) הוכיחו ש $C=C'$.

ב) הראו שהפונקציה $f:C\to[0,1]$ המוגדרת ע"י

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{2}\right)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$$ אינה חח"ע.

שאלה 6

א. נגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $d(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$. הוכיחו שמטריקה זו שקולה למטריקה הסטנדרטית מעל $\mathbb{R}$.

ב. הראו שהסדרה $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי שאינה מתכנסת ב $(\mathbb{R},d)$ (מסעיף א').

ג. מצאו דוגמא לקבוצה X עם שתי מטריקות שקולות d,ρ כך ש (X,d) שלם ו (X,ρ) לא שלם.