הקליד וערך: דביר חדד

משפטים והוכחות לבחינה:

(כל ההוכחות מהחוברת שלי באינפי 1 שמבוססת על ההרצאות של פרופ׳ אגרנובסקי)

<u>*1* : כל סדרה עולה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת</u>

<u>משפט</u>: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שקיימים חסמים תחתונים ועליונים, ונסמן $M = supx_n$ או $m = inf x_n$. אז: 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול ששווה לM. 2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול ששווה לm.

הוכחה: 1) $x_n \nearrow$. נניח שM ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומאחר והיא מונוטונית ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

כעת נוכיח עבור $M = +\infty$. ע״פ הגדרה $\forall E \in R \ \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים , ונקבל $\forall E \in R \ \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית. מ.ש.ל. ■

- יש הטוענים שאין צורך להוכיח גם עבור $M = +\infty$ כי אומרים שהסדרה חסומה. בכיתה הוכחנו עבור שני המקרים, כי באומרנו חסומה ניתן להבין שהיא חסומה ע״י $+\infty$.

<u>*2* : תנאי קושי, הכרחי ומספיק, להתכנסות סדרה</u>

<u>משפט</u>: הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או״א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע״פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי ע״פ אי השיוויון המשולש $|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע״פ הגדרה.

בכיוון השני $\Rightarrow$: נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע״פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m \geq \bar{n} : \ |x_n - x_m| < \varepsilon$ ע״פ הגדרת הערך מוחלט, והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נבחר $n, m \geq \bar{n}$.

ע״פ הערך המוחלט $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. וידוע מהרצאות קודמות כי $x_m - \varepsilon \leq \inf_{n \geq \bar{n}} x_n \leq \sup_{n \geq \bar{n}} x_n \leq x_m + \varepsilon$ וע״פ הגדרה נקבל כי$x_m - \varepsilon \leq l_{\bar{n}} \leq L_{\bar{n}} \leq x_m + \varepsilon$ וידוע כי $l_{\bar{n}}$ עולה מונוטונית, וכי$L_{\bar{n}}$ יורדת מונוטונית. לכן מתקבל $x_m - \varepsilon \leq l_{\bar{n}} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ובאופן דומה $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq L_{\bar{n}} + \leq x_m + \varepsilon$.

ואז $x_m - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq x_m + \varepsilon$ ואז נקבל כי מתקיים $0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq 2\varepsilon$

אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח ש$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l = lim_{n\to\infty} x_n$. מ.ש.ל. ■

3: מבחן קושי (מבחן השורש) להתכנסות

משפט: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים.נסמן $\lim \sqrt[n]{a_n} = \mathrm{K}_n = q$ אזי:

1. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אז אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \to q$. לכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : K_n < q'$ ז״א $\sqrt[n]{a_n} < q'$, ולכן $0 \leq q' < 1$, $a_n < (q')^n$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (q')^n$ מתכנס, וע״פ משפט A מתכנס. מ.ש.ל. ■.
2. $q > 1$ ז״א $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : K_n > 1$ וע״פ הגדרת ה$\sqrt[n]{a_n} > 1$ ולכן מתקיים כי $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : a_n > 1$. מכאן ש$a_n \nrightarrow 0$. ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מ.ש.ל. ■.

- אגרנובסקי ביקש שנדע גם את ההוכחה השניה, של ההכללה. לכאורה, מספיק ללמוד את השניה ולא את הראשונה, אבל בכל זאת מומלץ ללמוד את שניהן.

משפט: אם יש לנו טור חיובי, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $K_n := \sqrt[n]{a_n}$ וגם $\lim sup K_n = q$. אזי:

1. $q<1$ אזי הטור מתכנס
2. $q>1$ אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ2. נבחר $q > q' > 1$. נגדיר $L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת לq. מתקיים $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : q' < L_n$ ובגלל שזה סופרימום, לכל n קיים m_n כך שגם $K_{m_n} > 1$ ואז ע״פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל$\left(\sqrt[m_n]{a_{m_n}}\right)^{m_n} > 1^{m_n}$. לכן מתקבל $a_{m_n} > 1$, זה אומר שהאיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר. מ.ש.ל. ■

נעבור ל1. נבחר $q < q' < 1$. אנו יודעים כי $L_n \to q$ ולכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: L_n < q'$ אבל ידוע ש$L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ ואז $\forall n \geq \bar{n}$ מתקיים כי $k_n < q'$. לכן $\sqrt[n]{a_n} < q'$ ואז $a_n < (q')^n$, הצד הימני מתכנס ע״פ סדרה הנדסית (כי $0 < q < 1$), וע״פ מבחן ההשוואה גם הטור. מ.ש.ל. ■

4: תנאי דריכלה להתכנסות ע״פ איבר כללי, מסקנה- התכנסות ע״פ לייבניץ.

משפט: (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. נניח ש:

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים. ז״א ש$\exists \mathrm{C} \geq 0 \; \forall \mathrm{n}: |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq C$
ב. $b_n \searrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).
ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$.

נגדיר את התמרת אבל על מנת להקל בהוכחה: $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq \mathrm{C}$. ע״פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

כעת נגדיר: $\mathrm{T}_{n,p}=\sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k-A_{k-1})b_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}A_kb_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}A_{k-1}b_k$, והפעם נציב *k-1=m*.

נקבל $=\sum_{k=n+1}^{n+p}A_kb_k-\sum_{m=n}^{n+p-1}A_mb_{m+1}=A_{n+p}b_{n+p}-A_nb_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}A_k(b_k-b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נחזור להוכחה ונקבע $\varepsilon>0$. נקבל ע״פ אי השיוויון המשולש כי מתקיים:

$$|T_{n,p}|\le\underbrace{|A_{n+p}||b_{n+p}|}_{\le C|b_{n+p}|}+\underbrace{|A_n||b_{n+1}|}_{\le C|b_{n+1}|}+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|A_k||b_k-b_{k+1}|}_{\substack{\le C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})\\ \text{אפשר למחוק את הערך המוחלט}\\ \text{כי } b_n \text{ יורדת}}}$$

ולכן מתקיים:

$$|T_{n,p}|\le C(|b_{n+p}|+|b_{n+1}|)+\underbrace{C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})}_{\substack{=b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+2}-b_{n+3}+\cdots+b_{n+p-1}-b_{n+p}\\ \text{הכל מצומצם לראשון ולאחרון}}}\le 2C(|b_{n+p}|+|b_{n+1}|).$$

אנחנו גם משתמשים ב $\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})=b_{n+1}-b_{n+p}\le|b_{n+1}|+|b_{n+p}|$

ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח כי $|T_{n,p}|\le 2C(|b_{n+p}|+|b_{n+1}|)$. ובגלל ש $b_n\to 0$ מתקיים כי $\exists\bar{n}\ \forall n\ge\bar{n}:\ |b_n|\le\frac{\varepsilon}{4c}$. ולכן הטור מתכנס ע״פ תנאי קושי להתכנסות טורים. מ.ש.ל. ■

משפט לייבניץ טוען כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nc_n$ מתכנס אם $c_n\searrow 0$, אבל $(-1)^n$ חסום ע״י 1,1- ולכן המשפט נובע ישירות ממבחן דריכלה.

<u>5: משפט ערך הביניים של פונקציה רציפה ע״פ קושי</u>

<u>משפט</u>: $f:[a,b]\to R$ רציפה ב$[a,b]$. לכל $y\in[f(a),f(b)]$ (ב.ה.ג.כ. $f(a)<f(b)$) קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש f(c)=y.

הוכחה: נחליף $f(x)=y$ מתקיים $f(a)\le y\le f(b)$ ונגדיר $g(x):=f(x)-y$. מתקיים $g(a)\le 0$, $g(b)\ge 0$. צ״ל c כך ש g(c)=0. נגדיר: $\mathrm{E}:=\{x\in[a,b]:g(x)\le 0\}$ מתקיים $a\in E$ מתקיים גם $a\in[a,b]$ ולכן E חסום ויש לו חסם עליון סופי.

נגדיר: $c:=supE$. מתקיים כי תמיד $\forall n\in N\ \exists x_n\in E:\ c-\frac{1}{n}<x_n\le c$ בגלל ש f רציפה ב c לכן $g(x_n)_{n\to\infty}\to g(c)$ ידוע כי גם $x_n\in E:\ g(x_n)\le 0$ ולכן מיידית מתקיים $g(c)\le 0$ נניח $g(c)<0$.

מתקיים $\lim_{x\to c}g(x)=g(c)<0$ ולכן $\exists\delta>0\ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$ ומכאן $g(x)<0$ גם $g\left(c+\frac{\delta}{2}\right)<0$ לכן $c+\frac{\delta}{2}$ נמצא ב*E*.

וידוע כי $c+\frac{\delta}{2}>c=supE$ בסתירה. מכאן ש*g(c)=0* . מ.ש.ל. ■

<u>6: המשפט של וירשטראס: פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום, חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.</u>

<u>משפט</u>: תהי $f:[a,b]\to R$ רציפה בכל נקודה ב*[a,b]*. אזי:

1. f חסומה על *[a,b]*

2. קיים $x_{max} \in [a,b]$ כך ש$f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x_{max})$ וגם קיים $x_{min} \in [a,b]$ כך שמתקיים עבורו, בהתאם, $f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x_{min})$.

הוכחה:

1. נניח שf אינה חסומה אז $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a \le x_n \le b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של W.B קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to x_0 \in R$ וגם $a \le x_{n_k} \le b$. עבור $k \to \infty$ מתקיים $a \le x_0 \le b$ ומכאן $x_0 \in [a,b]$, ומכאן שf רציפה בנקודה x_0. לכן $x_{n_k} \to_{k\to\infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$. אזי $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$ ומצד שני $|f(x_0)| = +\infty \leftarrow n_k < |f(x_{n_k})|$. אזי $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה.
מ.ש.ל. ■

2. נסמן $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. וגם $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. נניח בשלילה שf לא מקבלת ערך M. זאת אומרת $\forall x \in [a,b]: f(x) \ne M$ אלא $\forall x \in [a,b]: f(x) \le M$ ומכאן $\forall x \in [a,b]: f(x) < M$. נגדיר: $g(x) := \frac{1}{M-f(x)}$ ידוע כי $f \in C[a,b]$ ומכאן שמתקיים $M - f(x) \in C[a,b]$ וגם $M - f(x) \ne 0$. מכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ רציפה ב*[a,b]*.
לפי תכונה 1, g חסומה ב*[a,b]*. אזי $\exists C \ge 0 \forall x \in [a,b]: 0 < g(x) \le C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M-f(x)} \le C$ ונקבל $f(x) \le M - \frac{1}{c}$
ומצאנו חסם מלעיל שקטן מהחסם העליון (הסופרימום), בסתירה! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור *[a,b]*. מ.ש.ל. ■

<u>7: נגזרת של פונקציית הרכבה</u>

<u>משפט</u>: תהי $h = g \circ f$, f דיפרנציאבילית בx_0, וg בנקודה $f(x_0)$. אזי h דיפרנציאבילית בx_0. והנגזרת היא $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

הוכחה: f דיפרנציאבילית בx_0, וגם $f(x_0+t) = f(x_0) + \overbrace{A}^{A=f'(x_0)} t + o(t), t \to 0$, g דיפרנציאבילית ב$y_0 = f(x_0)$. וגם כן מתקיים, בדומה לf, ש$g(y_0+s) = g(y_0) + Bs + o(s), s \to 0$. ומתקיים $B = g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0+t) = g(f(x_0+t)) = g(f(x_0) + At + o(t))$, ונגדיר $\varepsilon(t) = \frac{o(t)}{t} \to_{t\to0} 0$ ולכן $\varepsilon(t)\, t = o(t)$,
ובאופן דומה $\mu(s) \to_{s\to0} 0$, $o(s) = \mu(s)s$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0+t) = g\left(f(x_0) + \underbrace{At + \varepsilon(t)t}_{s}\right)$, ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0+t) = g(y_0+s)$.
מתקיים $h(x_0+t) = g(y_0) + Bs + \mu(s)s = g(f(x_0)) + B(At + \varepsilon(t)t) + \mu(At+\varepsilon(t)t)(At+\varepsilon(t)t)$.
ולכן $h(x_0+t) = g(f(x_0)) + BAt + \underbrace{B\varepsilon(t)t + \mu(At+\varepsilon(t)t)(A+\varepsilon(t))t}_{o(t), t\to0}$. ומכאן שמתקיים:

$h(x_0+t) = g(f(x_0)) + BAt + o(t), t \to 0$ ומכאן שh דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $BA = h'(x_0)$ וגם מתקיים $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. מ.ש.ל. ■

<u>8: משפט לגרנג' שהוא משפט ערך הממוצע</u>

<u>משפט</u>: תהי $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$,

ז"א שמתקיים $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה: נגדיר $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$. לכן לפי הלמה של רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-$F'(c)=0$, ז"א $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ולכן $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. מ.ש.ל. ■

- <u>*הלמה של רול: (אין חובה לדעת להוכיח אותה, אבל צריך לדעת אותה על מנת להוכיח את משפט לגרנג')*</u>

<u>משפט</u>: $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$. אם $f(a)=f(b)$ אז קיימת $c\in(a,b)$, כך ש-$f'(c)=0$.

הוכחה:

לפי המשפט של ויירשטראס, f מקבלת ב-*[a,b]* מקסימום ומינימום. $\exists x_{\max}\in[a,b]:f(x_{max})=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ כמו כן, בצורה דומה מאוד $\exists x_{\min}\in[a,b]:f(x_{min})=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. אם $x_{\min},x_{\max}\in\{a,b\}$ (במקרה ששניהם קצוות) אזי $f(x_{\min})=f(x_{\max})=f(a)=f(b)$. אם כך מתקיים $\min f(x)=\max f(x)$, ולכן *f=const* ולכן אפשר לקחת כל נקודה שהיא בתור *c*. מ.ש.ל. ■

<u>*9*: כלל לופיטל עם הוכחה למקרה של 0/0</u>

<u>משפט</u>: $p\in\bar{R}$. *f,g* שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ כאשר $U_{\delta_0}(p)=\begin{cases}(p-\delta_0,p+\delta_0),p\in R\\ \left(\frac{1}{\delta_0},+\infty\right),p=+\infty\\ \left(-\infty,-\frac{1}{\delta_0}\right),p=-\infty\end{cases}$.

נניח ש:

1. *f,g* גזירות ב-$U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$
2. $\forall x\in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}:g'(x)\neq0$
3. $\exists\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\bar{R}$.

ושמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

א) $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)=0$

ב) $\lim_{x\to p}g(x)=\pm\infty$ (אין צורך לדעת את ההוכחה !!!)

אזי קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$. בכל אחד מהמקרים א' וב'.

הוכחה: סביבה של L, (α,β). מתקיים $L\in R;(\alpha,\beta)=(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ או $L\in R;(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$ או באופן דומה $L=-\infty;(\alpha,\beta)=\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)$. גם מתקיים $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, לכן קיים $0<\delta<\delta_0$ כך שלכל $x\in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ מתקיים $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$. (משתמשים ב-$\delta$ כדי להגדיר את α',β')

עבור $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$ מתקיים $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. לפי משפט קושי אם ניקח $x_1,x\in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ קיים $\exists c\in(x,x_1)\vee(x_1,x):\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. ומאחר ומתקיים $c\in U_\delta(p)\backslash\{p\}$, וגם ידוע $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$,

לכן $\beta' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \alpha'$. מכאן ש$g$ לא מתאפסת בסביבת p.

א) $\lim_{x_1\to p} f(x) = \lim_{x_1\to p} g(x) = 0$ ידוע. וגם $\alpha < \alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta' < \beta$. נבצע מעבר גבול של $x_1 \to p$ ונגיע ל$\alpha < \alpha' \le \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \le \beta' < \beta$ מתקיימת סביבה $U_\delta(p)\backslash\{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$. לכן קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ב) כאן מתקיים $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$. לכן $\alpha'\big(g(x)-g(x_1)\big) < f(x)-f(x_1) < \beta'\big(g(x)-g(x_1)\big)$. לכן אפשר להעביר אגפים ולקבל $\underbrace{\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{A} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{\beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{B}$. כמובן כל זה כאשר $x \to p$. וגם ידוע לנו ממקודם שמתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. מכאן $\exists 0 < \delta < \delta_0 :\ \alpha < A\ ,B < \beta$. אם $x \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ אז $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

מ.ש.ל. ■

<u>*10* : נוסחת טיילור ע״פ שארית בצורה Peano.</u>

<u>משפט</u>: נניח $f \in D^n(a,b)$ כאשר $x_0 \in (a,b)$. אזי $f(x) = P_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$. (צורת *Peano*) ונגדיר כך את $P_n(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

הוכחה: באינדוקציה. עבור *n=1* זה כמעט ברור, כי לפי הגדרת הנגזרת $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), x \to x_0$.
כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז״א נניח את נכונות הטענה עבור *n-1*. ז״א ש$f' \in D^{n-1}(a,b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0 התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f')^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-1}$. לפי כלל לופיטל

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

וע״פ החלפת אינדקס $\{k-1=s\}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s}{n(x-x_0)^{n-1}} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחה}} 0$$

ולכן $f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = o((x-x_0)^n), x \to x_0$ מ.ש.ל. ■

בהצלחה במבחן !!!