תרגול 11 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

1 מרחבי המטריצה

הגדרה 1.1. תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. נגדיר את המרחבים הבאים:

1. **מרחב השורות** של A הוא
$$R\left(A\right)=\text{Span}\left\{R_1\left(A\right),\ldots,R_m\left(A\right)\right\}$$
2. **מרחב העמודות** של A הוא
$$C\left(A\right)=\text{Span}\left\{C_1\left(A\right),\ldots,C_n\left(A\right)\right\}$$
3. **מרחב האפס** של A הוא
$$N\left(A\right)=\left\{v\in\mathbb{F}^n|Av=0\right\}$$

דוגמה 1.2. תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. אזי

$$\begin{aligned}C\left(A\right)&=&\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{F}^2\\R\left(A\right)&=&\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\right\}\\N\left(A\right)&=&\left\{\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}\middle|t\in\mathbb{F}\right\}\end{aligned}$$

משפט **1.3**. פעולות שורה אלמנטריות אינן משנות את מרחב השורה ואת מרחב האפס של מטריצה, אבל כן משנות את מרחב העמודות שלה.

אלגוריתם **1.4** (אלגוריתם למציאת מרחבי המטריצה). תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. רוצים למצוא בסיס למרחבי המטריצה שלה.

1. מדרגים את A לצורה מדורגת (לא חייבים קנונית).
2. השורות השונות מאפס במטריצה המדורגת הן בסיס למרחב השורות.

3. העמודות במטריצה המקורית שבהן בסוף יש איבר מוביל הן בסיס למרחב העמודות.

4. את מרחב האפס פותרים כמו במערכת משוואות – מציבים משתנים חופשיים וכו'!

תרגיל 1.5. מצאו בסיס למרחבי המטריצה עבור

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$$

פתרון. מתחילים מלדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת. לכן:

1. $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $R\left(A\right)$.

2. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $C\left(A\right)$.

3. המשתנים החופשיים הם $z=t$ ו-$w=s$; אז מקבלים $y=-s$ וכן

$$x=-2y-3z-4w=2s-3t-4s=-3t-2s$$

לכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}-3t-2s\\-s\\t\\s\end{pmatrix}$. כדי לקבל בסיס נציב פעם אחת $t=1$ ו-$s=0$ ובפעם השנייה $t=0$ ו-$s=1$, ונקבל ש-$\left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $N\left(A\right)$.

משפט 1.6. תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. אזי

$$\dim R\left(A\right)=\dim C\left(A\right)$$

הגדרה 1.7. תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. **הדרגה** שלה היא $\operatorname{rank}\left(A\right)=\dim R\left(A\right)$.

משפט 1.8 (משפט הדרגה). תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. אזי

$$\operatorname{rank}\left(A\right)+\dim N\left(A\right)=n$$

תרגיל 1.9 (שאלת חשיבה!). 1. תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו-$B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ מטריצות. הוכיחו כי $AB=0$ אם ורק אם $C\left(B\right)\subseteq N\left(A\right)$.

2. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{3\times3}$ מטריצות כך ש-$\text{rank}\,(A)=\text{rank}\,(B)=2$. הוכיחו כי $AB\neq0$.

3. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $A^2=0$. הוכיחו כי $\text{rank}\,(A)\leq\frac{n}{2}$.

הוכחה.

1. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח כי $AB=0$. צ"ל $C(B)\subseteq N(A)$. אכן, לפי כפל עמודה-עמודה, לכל $j=1,\ldots,k$ מתקיים

$$0=C_j(AB)=A\cdot C_j(B)\Rightarrow C_j(B)\in N(A)$$

הוכחנו כי $\{C_1(B),\ldots,C_k(B)\}\subseteq N(A)$, ולכן

$$C(B)=\text{Span}\{C_1(B),\ldots,C_k(B)\}\subseteq N(A)$$

כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח כי $C(B)\subseteq N(A)$. צ"ל $AB=0$. נשים לב כי מהנתון נובע שלכל $j=1,\ldots,k$ מתקיים

$$C_j(B)\in N(A)\Rightarrow A\cdot C_j(B)=0$$

לפי כפל עמודה-עמודה, נקבל $AB=0$.

2. נניח בשלילה $AB=0$. לפי סעיף א', $C(B)\subseteq N(A)$. נחשב מימדים:

$$\begin{aligned}\dim C(B)&=\text{rank}\,(B)=2\\ \dim N(A)&=3-\text{rank}\,(A)=3-2=1\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו סתירה. מכאן ש-$AB\neq0$.

3. נניח כי $A^2=0$. לפי סעיף א', $C(A)\subseteq N(A)$. לכן

$$\text{rank}\,(A)=\dim C(A)\leq\dim N(A)=n-\text{rank}\,(A)$$

ומכאן נקבל $\text{rank}\,(A)\leq\frac{n}{2}$.

$\square$

משפט **1.10**. תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו-$B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ מטריצות. אזי

$$\text{rank}\,(AB)\leq\min\{\text{rank}\,(A),\text{rank}\,(B)\}$$

תרגיל 1.11. הוכיחו או הפריכו: קיימות מטריצות $A\in\mathbb{R}^{3\times2}$ ו-$B\in\mathbb{R}^{2\times3}$ שעבורן

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

פתרון. התשובה היא שאין מטריצות כאלו! ראשית, $\text{rank}\,(A),\text{rank}\,(B)\leq2$, ולכן, לפי המשפט, $\text{rank}\,(AB)\leq2$. אבל

$$\text{rank}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}=3$$

ולכן זה לא יכול להיות.

תרגיל 1.12. יהי $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה. נגדיר $A = vv^t$.

1. הוכיחו כי A מוגדרת, ריבועית וסימטרית.
2. חשבו את $\operatorname{rank}(A)$.

פתרון.

1. קודם כל, $v \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, כלומר $v^t \in \mathbb{F}^{1\times n}$. כיוון שמספר העמודות של v = 1 = מספר השורות של v^t, נקבל שהכפל vv^t מוגדר, והגודל שלו הוא $n \times n$. לגבי הסימטריות:

$$A^t = \left(vv^t\right)^t = \left(v^t\right)^t v^t = vv^t = A$$

2. לפי המשפט,

$$\operatorname{rank}\left(vv^t\right) \leq \min\left\{\operatorname{rank}(v), \operatorname{rank}\left(v^t\right)\right\} = \min\{1,1\} = 1$$

מצד שני, נראה כי לא יכול להיות ש-$vv^t = 0$. $v \neq 0$, ולכן קיים i שעבורו $v_i \neq 0$. לכן,

$$a_{ii} = \left(vv^t\right)_{ii} = v_i\left(v^t\right)_i = v_i^2 \neq 0$$

לכן $A \neq 0$, כלומר $\operatorname{rank}(A) \neq 0$. מכאן בהכרח $\operatorname{rank}(A) = 1$.

תרגיל 1.13. תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ו-$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות, ונניח ש-B הפיכה. הוכיחו כי

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$$

הוכחה. ראשית, לפי המשפט,

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$$

מצד שני,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AI) = \operatorname{rank}\left(ABB^{-1}\right) = \operatorname{rank}\left((AB)B^{-1}\right) \leq \operatorname{rank}(AB)$$

לכן יש שוויון. □

הערה 1.14. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. אזי

$$\begin{aligned} C(A) &= \{Av \mid v \in \mathbb{F}^n\} \\ R(A) &= \left\{v^tA \mid v \in \mathbb{F}^n\right\} \end{aligned}$$

לפי תרגיל שהיה לנו פעם.

משפט **1.15**. הטענות הבאות שקולות עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

1. A הפיכה.
2. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
3. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ שעבורו למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
4. למערכת $Ax = 0$ יש רק פתרון אחד – הפתרון הטריוויאלי.

5. עמודות A בת"ל.
6. $C\left(A\right)=\mathbb{F}^{n}$.
7. $\text{rank}\left(A\right)=n$.
8. שורות A בת"ל.
9. $R\left(A\right)=\mathbb{F}^{n}$.

תרגיל 1.16. הוכיחו כי לכל $n\geq3$, המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n^{2}-n+1 & n^{2}-n+2 & \cdots & n^{2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

אינה הפיכה.

הוכחה. נשים לב כי

$$R_{2}\left(A\right)-R_{1}\left(A\right)=\begin{pmatrix}n & n & \cdots & n\end{pmatrix}$$

אבל גם

$$R_{3}\left(A\right)-R_{2}\left(A\right)=\begin{pmatrix}n & n & \cdots & n\end{pmatrix}$$

לכן נקבל $R_{2}\left(A\right)-R_{1}\left(A\right)=R_{3}\left(A\right)-R_{2}\left(A\right)$, כלומר $R_{1}\left(A\right)-2R_{2}\left(A\right)+R_{3}\left(A\right)=0$. זה אומר שהשורות של A ת"ל, ולכן A אינה הפיכה. $\square$