תרגיל 4 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. מצאו את סכומם של הטורים הבאים:

1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}=1\frac{1}{5}$$

1.2. $$\sum_{n=1}^{\infty}4\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{4\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}}=-\frac{8}{5}=-1\frac{3}{5}$$

1.3.

$$8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2^3+2^2+2+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots=2^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\right)=$$

$$2^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=8\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{0.5}=16$$

1.4.

$$0.234234234\ldots=\frac{234}{1{,}000}+\frac{234}{1{,}000{,}000}+\ldots=234\left(\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{1{,}000{,}000}+\ldots\right)=234\left(\frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{1000^2}+\ldots\right)$$

$$=234\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^n=234\cdot\frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=234\cdot\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{999}{1000}}=234\cdot\frac{1}{999}=\frac{234}{999}$$

2. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

2.1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{3^n+9}$$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n=\frac{6}{3^n+9}\sim\frac{1}{3^n}=b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{3^n+9}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 3^n}{3^n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6\cdot 3^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{9}{3^n}}=\frac{6}{1+0}=6$$

מכיוון ש $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה $-1<q<1$. לכן, גם הטור הנתון מתכנס.

.2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n=\frac{1}{n^2-4n+5}\sim\frac{1}{n^2}=b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2-4n+5}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+5}=1$$

מכיוון ש $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha>1$. לכן, גם הטור הנתון מתכנס.

.2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}+3\sqrt{n}}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[4]{n}+3\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n}+3\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}+3\sqrt{n}}=\frac{1}{3}$$

מכיוון ש $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha\le 1$. לכן, גם הטור הנתון מתבדר.

.2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2^{n-1}}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון,

$$\frac{\sin^2 n}{2^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה $-1 < q < 1$, לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתכנס.

2.5. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n = \frac{n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}} \sim \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{n}{n^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{1\frac{1}{2}}} = b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}}{\frac{1}{n^{1\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^{1\frac{1}{2}}}{(16+n^2)\sqrt{n-3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2\frac{1}{2}}+n^{1\frac{1}{2}}}{(16+n^2)\sqrt{n-3}} = \frac{1}{1} = 1$$

מכיוון ש $0 < \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} < \infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1\frac{1}{2}}}$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha > 1$. לכן, גם הטור הנתון מתכנס.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n^3+2}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n = \frac{n-5}{n^3+2} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-5}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5n^2}{n^3+2} = 1$$

מכיוון ש $0 < \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} < \infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha > 1$. לכן, גם הטור הנתון מתכנס.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון,

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} \le \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{1\frac{1}{4}}}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1\frac{1}{4}}}$ מתכנס (כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha > 1$), לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתכנס.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \ldots$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n = \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+n)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$$

מכיוון ש $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנסים או מתבדרים יחד. אבל, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha \le 1$. לכן, גם הטור הנתון מתבדר.

2.9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון,

ידוע כי החל מ n מסויים $\ln n < \sqrt{n}$ לכן, החל מ n מסויים

$$0 \le \frac{1}{n} = \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^2} \le \frac{1}{\ln^2 n}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר (כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha \le 1$), לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתבדר.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^3}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון,

$$\frac{\ln^3 n}{n^3} = \frac{(\ln n)^3}{n^3} \le \frac{\left(n^{\frac{1}{10}}\right)^3}{n^3} = \frac{n^{\frac{3}{10}}}{n^3} = \frac{1}{n^{2\frac{7}{10}}}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\frac{7}{10}}}$ מתכנס (כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha>1$), לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתכנס.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n^3}}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון,

$$\frac{1}{\sqrt{n^3}}\le\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n^3}}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ מתבדר (כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עבור $\alpha\le 1$), לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתבדר.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני,

$$a_n=\frac{2n-1}{5^n}\sim\frac{n}{5^n}=b_n$$

נחשב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{5^n}}{\frac{n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$$

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$ לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ באמצעות מבחן דאלמבר.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}<1$$

לכן, לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ מתכנס. לכן, גם הטור הנתון מתכנס.

הערה: יכולנו להשתמש במשפט דאלמבר ישירות על הטור המקורי.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן דאלמבר. נסמן $a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(n+2)}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(n+2)(n+3)}^{\to 1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1\cdot 0=0<1$$

לכן, לפי מבחן דאלמבר הטור הנתון מתכנס.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן דאלמבר.

נסמן $a_n=\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$ ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{\sqrt{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2n^{\sqrt{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}<1$$

לכן, לפי מבחן דאלמבר הטור הנתון מתכנס.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

פתרון: נשים לב, הטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן דאלמבר.

נסמן $a_n=\frac{2^n n!}{n^n}$ ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}=2\left(e^{-1}\right)^1=\frac{2}{e}<1$$

לכן, לפי מבחן דאלמבר הטור הנתון מתכנס.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n$

פתרון: נסמן $a_n=\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n$ ונחשב $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n="\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}"=\infty\neq 0$. מכיוון ש

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, הטור מתבדר.

בהצלחה! ☺