תרגול 6

1. תרגיל: T_3 הוא תורשתי (גם T_0, T_1, T_2 תורשתיות. T_4 תורשתי רק לקבוצות סגורות). כלומר, יהא (X, τ) מ״ט אזי כל תת מרחב A הוא גם T_3.
פתרון: יהא A תת מרחב. ראשית, נוכיח שהוא T_1: יהיו $a_1 \neq a_2 \in A$. אזי קיימת $U \in \tau$ כך ש $a_1 \in U$ ו $a_2 \notin U$. לכן אפשר לקחת את $U \cap A$ שהיא פתוחה ב A. ומתקיים $a_1 \in U \cap A$, $a_2 \notin U \cap A$. באופן סימטרי ניתן למצוא סביבה של a_2 בA שלא מכילה את a_1.
הפרדה של קבוצה סגורה מנקודה: תהא S סגורה ב A ו $a \notin S$. קיימת S' סגורה ב X כך ש $S = S' \cap A$. לכן קיימת קבוצות פתוחות ב X זרות U_1, U_2 כך ש $S' \subseteq U_1, a \in U_2$ לכן

$$S = S' \cap A \subseteq U_1 \cap A,\ a \in U_2 \cap A$$

שהן פתוחות ב A וזרות.

2. תרגיל: הוכח/הפרך: תמונה רציפה של T_2 היא T_2. כלומר, אם $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ רציפה ועל, ו(X, τ) הוא T_2, האם בהכרח (Y, σ) הוא T_2?
פתרון: הפרכה: נסתכל על $X = \{a, b\}$ עם הטופולוגיה $\{X, \emptyset, \{a\}\}$, והפונקציה $f : \mathbb{R} \to X$ המוגדרת $f([0, \infty) = \{b\}, f(-\infty, 0) = \{a\}$. קל לראות שהיא רציפה, אבל X אינו T_2.

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי אינסופי ו Y מרחב טופולוגי עם תכונת T_2, ותהא $f : (X, \mathrm{cof}) \to (Y, \tau)$ רציפה. הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: נניח בשלילה $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. נסמן ב$V_i$ סביבות פתוחות של y_i שהם זרות. מרציפות נקבל כי קיימות סביבות פתוחות של U_i של x_i כך ש $f(U_i) \subseteq V_i$. כזכור מתרגול קודם, כל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות במרחב קוסופי אינסופי אינן זרות. לכן קיים $a \in U_1 \cap U_2$. אבל אז $f(a) \in V_1 \cap V_2$. סתירה.

(א) למשל: כל פונקציה $f : (\mathbb{R}, \mathrm{cof}) \to \mathbb{R}$ רציפה היא קבועה.

פנים וסגור

1. הגדרה: יהי (X, τ) מ״ט ו$A \subseteq X$ תת קבוצה. . הסגור של A מסומן $cl(A) = \bar{A} = \cap_{A \subseteq S} S$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A. הפנים של A מסומן $int(A) = \mathring{A} = \cup_{O \subseteq A} O$ הקבוצה הפתוחה המקס' שמוכלת ב A.

(א) דוגמא: $A = [0, 1)$ ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית. הפנים הוא $(0, 1)$ והסגור הוא $[0, 1]$

(ב) שימו לב שקבוצה היא בגורה אמ"ם היא שווה לסגור שלה, ופתוחה אמ"ם היא שווה לפנים שלה.

(ג) הוכח/הפרך: $\overline{\cap A_i}=\cap\bar{A}_i$.
פתרון: $\overline{\cap A_i}\subseteq\cap\bar{A}_i$. $\cap A_i\subseteq\cap\bar{A}_i$. בנוסף, $\cap\bar{A}_i$ היא קבוצה סגורה כחיתוך של סגורות ולכן $\overline{\cap A_i}\subseteq\cap\bar{A}_i$. הכיוון השני אינו נכון למשל $A_1=(0,1)\,,A_2=(1,2)$. אז $\overline{A_1\cap A_2}=\bar{\emptyset}=\emptyset$. לעומת זאת, $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2=\{1\}$.

(ד) הוכח/הפרך: $\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$.
פתרון: הוכחה: $A_1\cup A_2\subseteq\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$. בנוסף, $\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$ קבוצה סגורה כאיחוד סופי של סגורות ולכן $\overline{A_1\cup A_2}\subseteq\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$. בכיוון השני $\bar{A}_i\subseteq\overline{A_1\cup A_2}$ ולכן גם האיחוד.

(ה) טענה: $A\subseteq\mathbb{R}$ בת מניה אזי $\mathring{A}=\emptyset$.
פתרון: אחרת $\mathring{A}$ מיכלה קבוצה פתוחה. הקבוצות הפתוחות ב$\mathbb{R}$ הן איחודים של קטעים פתוחים. כל קטע פתוח הוא לא בן מניה. סתירה.

(ו) משפט: $p\in\bar{A}$ אמ״מ לכל סביבה פתוחה $p\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$.

(ז) משפט: $p\in int(A)$ אמ"ם קיימת O פתוחה $p\in O\subseteq A$.

(ח) טענה: $\bar{A}^c=\mathring{A^c}$.
פתרון: $x\in\mathring{A^c}$ אמ״מ $x\notin\mathring{A}$ אמ״מ כל סביבה פתוחה $x\in U$ מקיימת U לא מוכלת ב A אמ״מ כל סביבה פתוחה $x\in U$ מקיימת $U\cap A^c\neq\emptyset$ אמ״מ $x\in\bar{A}^c$.

(ט) $(X,\tau_{co-finite})$. לכל תת קבוצה A מתקיים כי: או שA פתוחה, או ש$int(A)=\emptyset$.
הוכחה: נניח כי $A\neq\mathring{A}$ כלומר A אינה פתוחה ולכן A^c אינסופי. בפרט לכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ מתקיים כי $A^c\subseteq B^c$ ולכן B לא פתוחה. ומכאן ש $\mathring{A}=\emptyset$.

2. הגדרה: $X\supseteq A$ נקראת צפופה ב X אם $\bar{A}=X$.

3. הערה: קבוצה היא צפופה אמ"ם החיתוך שלה עם כל קבוצה פתוחה לא ריקה הוא לא ריק.

4. תרגיל: בטופולוגיה הקוסופית על מרחב אינסופי, כל קבוצה אינסופית היא צפופה.
פתרון: תהי X קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקוסופית, ותהי $A\subseteq X$ קבוצה אינסופית. $\bar{A}$ היא קבוצה סגורה שמכילה את A. הקבוצות הסגורות בX הן קבוצות סופיות וX. לכן הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את A היא X.

5. תרגיל: (X,τ) מ״ט. $X\supseteq Y\supseteq A$ אזי $cl_Y(A)=Y\cap cl_X(A)$
הוכחה: בתרגיל זה האות S תסמן קבוצה סגורה. באות S_Y נסמן קבוצה סגורה בY.

$$cl_Y(A)=\bigcap_{A\subseteq S_Y}S_Y=\bigcap_{A\subseteq S_Y=S\cap Y}(S\cap Y)=\left[\bigcap_{A\subseteq S}S\right]\cap Y=cl_X(A)\cap Y$$

6. תרגיל: האם $int_Y(A)=Y\cap int_X(A)$?
פתרון: לא. למשל: הפנים של $\mathbb{Q}$ ב$\mathbb{R}$ הוא קבוצה ריקה. אבל הפנים של $\mathbb{Q}$ בעצמו זה $\mathbb{Q}$.

7. תרגיל: יהיו Y בעל תכונה T_2 ויהיו $f,g:X\to Y$ רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f=g$.
פתרון: נניח בשלילה שקיים x כך ש: $f(x)\neq g(x)$ אזי קיימות להן סביבות פתוחות זרות מפרידות V,U. מרציפות נקבל כי $f^{-1}(V),g^{-1}(U)$ פתוחות. נשים לב ש$x\in f^{-1}(V)\cap$ $g^{-1}(U)$, ולכן $f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U)$ היא קבוצה פתוחה לא ריקה (כחיתוך של 2 קבוצות פתוחות). מכיוון שA היא קבוצה צפופה היא נחתכת עם כל קבוצה פתוחה לא ריקה. כלומר, קיים $a\in A\cap f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U)$. מכיוון שעל הקבוצה A הפונקציות f וg מזדהות, נקבל ש $f(a)=g(a)$. אבל $f(a)\in V,g(a)\in U$. בסתירה לכך ש U וV זרות.

8. הגדרה: ספרביליות: X נקרא ספרבילי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה. דוגמאות: כל מרחב קו-סופי.

(א) הערה: הטופולוגיה הקומנייתית על קבוצה X שאינה בת מניה היא לא ספרבילית.
הסבר: תהי $A \subseteq X$ תת קבוצה בת מניה. לפי הגדרת הטופולוגיה, A סגורה. לכן $\bar{A} = A$. בפרט, A לא צפופה.

9. תרגיל: ספרביליות אינה תכונה תורשתית.
הוכחה: נקח את חצי המישור העליון עם קבוצות פתוחות שהן איחודים של כדורים ביחד עם נקודת החיתוך עם ציר הx. אז $\mathbb{Q}^2$ חיתוך עם חצי המישור העליון צפוף שם. אבל ציר הx הוא תת מרחב דיסקרטי לא בן מניה.

10. תרגיל: יהא (X, τ) מ"ט. אזי הוא T_3 אמ"מ T_1 וכן לכל $x \in U \in \tau$ קיימת V פתוחה כך ש $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$
פתרון: $(\Rightarrow)$ צ"ל שX הוא T_3: נתון שהוא T_1. נוכיח הפרדה בין נקודה לקבוצה סגורה: תהא S סגורה ו$x \in S^c$ מהנתון קיימת V פתוחה כך ש $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq S^c$ ואז $S \subseteq$ $\bar{V}^c, \in V$ פתוחות וזרות (כי $\bar{V}^c \subseteq V^c$.
$(\Leftarrow)$ יהיו $x \in U \in \tau$ לפי תכונת T_3 ניתן להפריד את x ואת U^c. כלומר קיימות V_1, V_2 פתוחות זרות כך ש $x \in V_1, U^c \subseteq V_2$ ואז $x \in V_1 \subseteq V_2^c \subseteq U$. מכיוון שV_2 פתוחה, V_2^c סגורה. ולכן מהגדרת סגור, $\bar{V_1} \subseteq V_2^c$. מכאן נקבל ש: $x \in V_1 \subseteq \bar{V_1} \subseteq V_2^c \subseteq U$.