פתרונות לתרגיל בית 9

.1

(א) נמיר את הפולינומים $x^2, 2x+x^2, x+x^3$ לוקטורים $(0,1,0,0),(0,1,2,0),(1,0,1,0)$ נשים אותם בשורות מטריצה ונדרג אותה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת צורה מדורגת ואין בה שורות אפסים ולכן הפולינומים הם באמת בת"ל.

(ב) נרכיב מערכת משוואות

$$ax^2 + b(2x+x^2) + c(x+x^3) = x - x^3$$

שמתרגמת ל

$$c = -1$$

$$a + b = 0$$

$$2b + c = 1$$

אפשר להמיר למטריצה ולפתור

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אבל במקרה הזה קל לראות שמתקבל $c=-1$ $b=1$ ו $a=-1$. ולכן הפולינום אכן נמצא ב span.

.2

(א) לא נכון. ניקח

$$A = \{(1,0)\}, \quad B = \{(0,1)\}$$

ואז

$$A + B = \{(1,1)\}$$

נשים לב ש

$$(1,1) \in span(A+B)$$

אבל

$$(1,1) \notin span(A), \quad (1,1) \notin span(B)$$

ולכן

$$span(A+B) \neq span(A) \cup span(B)$$

(ב) לא נכון. כמו קודם

$$A = \{(1,0)\}, \quad B = \{(0,1)\}$$

ואז

$$span(A \cup B) = span(\{(1,0),(0,1)\}) = \mathbb{R}^2$$

לכן

$$(1,1) \in span(A \cup B)$$

אבל כמו בסעיף א'

$$(1,1) \notin span(A) \cup span(B)$$

ולכן

$$span(A \cup B) \neq span(A) \cup span(B)$$

.3

הוכחה. שימו לב : על מנת להוכיח שיוויון קבוצות אתם צריכים להראות הכלה הפוכה. כלומר לקחת איבר מקבוצה A ולהראות ששייך לקבוצה B וכן להיפך.
גם כאן נעשה זאת :

<u>כיוון ראשון</u> : יש להוכיח $sp\{v_1,v_2\} \supseteq sp\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$.
נתון $v \in sp\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$.
כלומר, קיימים סקלרים $\alpha,\beta \in F$ כך ש $v=\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2)$.

נפתח את הסוגריים ונקבל : $v=(\alpha+\beta)v_1+(\alpha-\beta)v_2$. כלומר בעצם קיבלנו שניתן להביע את הווקטור כצ״ל של הוקטורים v_1,v_2, ולכן בסה״כ קיבלנו : $sp\{v_1,v_2\} \supseteq sp\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$.

<u>כיוון שני :</u> $sp\{v_1,v_2\} \subseteq sp\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$.
נתון $v \in sp\{v_1,v_2\}$. , קיימים סקלרים $\alpha,\beta \in F$ כך ש $v=\alpha v_1+\beta v_2$. אנחנו מחפשים סקלרים : $\gamma,\delta \in F$ כך ש : $\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma(v_1+v_2)+\delta(v_1-v_2)}$.(*)

כלומר אם נפתח :
$\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_1+\gamma v_2+\delta v_1-\delta v_2$
$\alpha v_1+\beta v_2=\underbrace{(\gamma+\delta)}_{\alpha}v_1+\underbrace{(\gamma-\delta)}_{\beta}v_2$ ולכן אנחנו בעצם מחפשים : $\boxed{\begin{cases}\gamma+\delta=\alpha\\ \gamma-\delta=\beta\end{cases}}$.(**)

נעשה מספר פעולות : אם נחבר את המשוואות (**) , נקבל : $2\gamma=\alpha+\beta$, ולכן $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
מצד שני אם נחסר את המשוואות (**), נקבל : $2\delta=\alpha-\beta$, כלומר $\delta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

נחזור למשוואה (*) בסה״כ קיבלנו,

$$\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma(v_1+v_2)+\delta(v_1-v_2)=\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\gamma}(v_1+v_2)+\underbrace{\frac{\alpha-\beta}{2}}_{\delta}(v_1-v_2)}$$

המשמעות היא כי מצאנו שניתן להביע את הווקטור $\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2}$ כצ״ל של הוקטורים $(v_1+v_2),(v_1-v_2)$ ולכן בסה״כ הוכחנו גם את $sp\{v_1,v_2\} \subseteq sp\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$.

ובזה סיימנו.

.4

יהיה $V=\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\,|\,A^t=A\}$ מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות .

(א) מצא בסיס ל V. מהו המימד של V.

פתרון: כל מטריצה סימטרית היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ולכן

$$V=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\,|\,a,b,d\in\mathbb{R}\}=$$
$$\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,|\,a,b,d\in\mathbb{R}\}$$
$$=span_{\mathbb{R}}\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

בנוסף קל לראות כי אכן המטריצות בת"ל ולכן בסיס. מסקנה $dim_{\mathbb{F}}V=3$.

(ב) תהא $S=\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\}\subset V$. מצא את $span(S)$.

פתרון: כמו בסעיף הראשון נעבוד עם המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & b \\ 5 & 2 & d \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & d-5a \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-7a+2b \end{array}\right)$$

כלומר $span(S)=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\,|\,d-7a+2b=0\}=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & 7a-2b \end{pmatrix}\}$

.5

נראה שהקבוצה הראשונה שווה לשנייה. וקטור נמצא בspan של קבוצת הוקטורים אם"ם הוא צירוף לינארי שלה. לכן, $(x,y,z,w) \in span\{(0,1,1,1),(2,1,3,-1),(1,1,2,0)\}$ אם"ם קיימים סקלרים a,b,c כך ש $(x,y,z,w) = a(0,1,1,1) + b(2,1,3,-1) + c(1,1,2,0)$. לכן, הוקטור הוא צ"ל אם"ם קיים פתרון למערכת המשוואות הלינארית על a,b,c כאלה. בעצם, אנו רוצים לאמר על מערכת משוואות פרמטרית מתי יש לה פתרון. נביט במערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & x \\ 1 & 1 & 1 & | & y \\ 1 & 3 & 2 & | & z \\ 1 & -1 & 0 & | & w \end{pmatrix}$$

נדרג את המערכת לקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & y \\ 0 & 2 & 1 & | & x \\ 0 & 0 & 0 & | & z-y-x \\ 0 & 0 & 0 & | & w-y+x \end{pmatrix}$$

זכרו שלא מעניין אותנו פתרון המערכת, שבן אלו הסקלרים של הצירוף הלינארי. מה שמעניין אותנו הוא **האם קיים פתרון למערכת** ובמקרה זה קיים פתרון אם"ם $z-y-x=0$ וגם $w-y+x=0$ וזו בדיוק הקבוצה השנייה.

(שימו לב גם למשפט מתרגול שעבר - b נמצא במרחב העמודות של A אם ורק אם למערכת Ax=b יש פתרון. זה בדיוק מה שקיבלנו בתרגיל זה.)

בעת נראה את השיוויון בין הקבוצה השנייה לשלישית. המרחב הוא בעצם אוסף הפתרונות של מערכת המשוואות הלינארית הנתונה. נדרג אותה והפעם **נחפש את הפתרון הכללי**.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני משתנים תלויים- x,y ושני משתנים חופשיים- z,w. נסמן z=t, w=s ונקבל פתרון כללי מהצורה $\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s\right)$