פתרון המבחן בקישור הבא.

1. תהיינה A, B קבוצות חסומות מלעיל

a. **הוכיחו/הפריכו:** $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

b. **הוכיחו/הפריכו:** $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$

סעיף א':

נסמן ב $M = \max\{\sup A, \sup B\}$ ונוכיח כי M הוא החסם העליון של $A \cup B$.

ראשית נוכיח כי M חסם מלעיל של $A \cup B$.

יהי $x \in A \cup B$ צ"ל $x \leq M$

אכן, אם $x \in A$ אז

$$x \leq \sup A \leq M$$

ואם $x \in B$ אז

$$x \leq \sup B \leq M$$

כעת צריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \in A \cup B$ כך ש $M - \varepsilon < x$

יהי $\varepsilon > 0$.

אם $M = \sup A$ קיים $a \in A$ כך ש $M - \varepsilon = \sup A - \varepsilon < a$ ונבחר $x = a \in A \cup B$

אם $M = \sup B$ הוכחה דומה.

סעיף ב':

$$A = \{1,2\}, B = \{-1,-2\}$$

$$A \cdot B = \{-1,-2,-4\}$$

$$\sup(A \cdot B) = -1$$

$$\sup(A) = 2$$

$$\sup(B) = -1$$

הפרכה.

2. **חשבו** את גבולות הסדרות הבאות:

a. $a_n = \frac{3^{n^2}}{n!}$

b. $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

סעיף א'

$$a_n = \frac{3^{(n^2)}}{n!}$$

נבצע את מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{((n+1)^2)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{(n^2)}} = \frac{3^{2n+1}}{n+1} \to \infty$$

וכיוון שגבול המנה גדול מ1, הסדרה המקורית שואפת לאינסוף.

סעיף ב'

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \to 0^{\infty} = 0$$

3. תהי a_n סדרה המקיימת $\forall n: a_n > 0$.

a. נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, **הוכיחו** כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס

b. **מצאו** דוגמא עבורה $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ אבל $\sum a_n$ מתבדר

סעיף א'

נשים לב כי

$$\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right)^2 \geq 0$$

$$a_{n+1} - 2\sqrt{a_{n+1}a_n} + a_n \geq 0$$

$$\sqrt{a_{n+1}a_n} \leq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$$

הטור של צד ימין מתכנס כסכום של שני טורים מתכנסים. ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור השמאלי מתכנס.

סעיף ב': נביט בסדרה

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } n \\ \frac{1}{n^4} & \text{אי זוגי } n \end{cases}$$

מתקיים בבירור כי $a_n \nrightarrow 0$ ולכן $\sum a_n$ מתבדר.

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^2} & n \text{ זוגי} \\ \dfrac{1}{n^2} & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

בכל מקרה

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן הטור $\sum \sqrt{a_{n+1} a_n}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

4. **קבעו והוכיחו** האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

סעיף א': מדובר בטור חיובי (החל משלב מסויים).

הסדרה יורדת נעשה עיבוי ונקבל שהטור המקורי חבר של

$$\sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n) \ln\ln 2^n} = \sum \frac{1}{n \cdot \ln(2) \ln(n \cdot \ln(2))} = \sum \frac{1}{\ln(2)\, n\, (\ln(n) + \ln\ln 2)}$$

עם מבחן השוואה גבולי אפשר להוכיח שזה חבר של

$$\sum \frac{1}{n(\ln(n))}$$

ושוב בעזרת עיבוי מקבלים שזה חבר של $\sum \frac{1}{n}$ וסה"כ הטור בשאלה מתבדר.

סעיף ב': נעשה את מבחן השורש

$$\sqrt[n]{n^2 \left(1-\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 1 \cdot \frac{1}{e} < 1$$

הטור מתכנס בהחלט!

סעיף ג':

$$\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} > \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הטור גדול מטור מתבדר, ולכן מתבדר (שוב, מדובר בטור חיובי).

a. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2\pi]$ המקיימת $f(x)\sin(x)\geq 0$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,2\pi]$ עבורה $f(c)=0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\geq 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\geq 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\leq 0$$

ולכן לפי ערך הביניים הפונקציה הרציפה f מתאפסת בקטע $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

a. **הוכיחו** כי לכל x,y מתקיים $|\sin(x)-\sin(y)|\leq|x-y|$

אם $x=y$ מקבלים שיוויון, אחרת מותר לחלק וצ"ל

$$\left|\frac{\sin(x)-\sin\,(y)}{x-y}\right|\leq 1$$

לפי לגראנז' בקטע בין x לy (הרי מדובר בשני מספרים שונים) קיימת ביניהם נקודה c כך ש

$$\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}=\cos(c)$$

והרי ברור לכולם ש

$$|\cos\,(c)|\leq 1$$

b. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $(0,1)$ כך שהגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ אינו קיים.

הוכיחו כי הנגזרת $f'(x)$ אינה חסומה בקטע $(0,1)$

אם f חסומה ב$\left(0,\frac{1}{2}\right]$, ראו את הפתרון בקישור הבא (שאלה מספר 5).

אם f אינה חסומה בקטע זה, נניח אינה חסומה מלעיל, נוכיח.

ניתן לבנות סדרת מספרים בקטע כך ש

$$f(a_n) > n$$

ניקח תת סדרה מתכנסת של a_n, נסמנה a_{k_n}. כיוון ש $0 < a_{k_n} \le \frac{1}{2}$

מתקיים כי

$$0 \le \lim a_{k_n} \le \frac{1}{2}$$

אבל $f\left(a_{k_n}\right) \to \infty$ ולכן בגלל הרציפות, $a_{k_n} \to 0$

הרי אם $a_{k_n} \to c \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ אז $f\left(a_{k_n}\right) \to f(c) \ne \infty$ בסתירה.

נבחר תת-תת סדרה $a_{k_{m_n}}$ המקיימת

$$a_{k_{m_{n+1}}} < a_{k_{m_n}}$$

$$f\left(a_{k_{m_{n+1}}}\right) > f\left(a_{k_{m_n}}\right) + 1$$

כעת

$$f'(c_n) = \frac{f\left(a_{k_{m_{n+1}}}\right) - f\left(a_{k_{m_n}}\right)}{a_{k_{m_{n+1}}} - a_{k_{m_n}}} > \frac{1}{a_{k_{m_{n+1}}} - a_{k_{m_n}}} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ולכן הנגזרת אינה חסומה מלרע.

דרך נוספת:

נב"ש שהנגזרת חסומה, לכן קיים m כך שלכל $x \in (0,1)$ מתקיים כי

$$f'(x) \le m$$

$$h(x) = f(x) - mx$$

$$h'(x) \le 0$$

לכן h יורדת בקטע.

לכן לכל $x \in (0,1)$ מתקיים כי

$$h(x) \le h(0)$$

$$f(x) - mx \le f(0)$$

$$f(x) \leq mx + f(0)$$

וכיוון ש $mx + f(0)$ חסומה בקטע $[0,1]$ (רציפה בקטע סגור), והפונקציה קטנה ממנה, גם היא חסומה, בסתירה.