מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

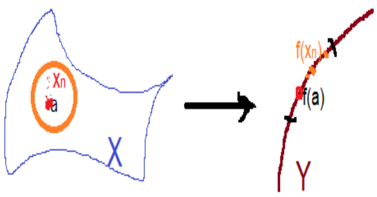
הרצאה 3

משפט (עיקרון $Heine$): נניח (X,d), (Y,ρ) מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)



הוכחה:

$(1) \Leftarrow (2)$:

נתון ש $x_n \xrightarrow{d} a$. צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a \in X$.

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$ (הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב ϵ-סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

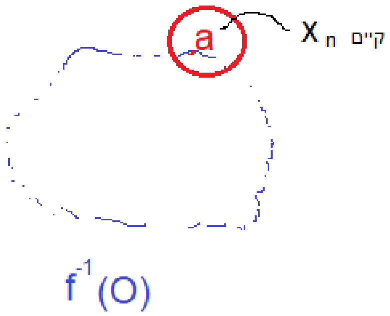
$(2) \Leftarrow (3)$:

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho): f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" $\exists a\in f^{-1}(O): \forall\epsilon>0\ \ B_\epsilon(a)\not\subseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon:=\frac{1}{n}$ קיים $x_n\in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n\in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n\notin f^{-1}(O)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} d(a,x_n)<\frac{1}{n} \\ f(x_n)\notin O\end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a,x_n)<\frac{1}{n}$ ולכן - $x_n\xrightarrow{d}a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n)\overset{\rho}{\nrightarrow}f(a)$.

$f(a)\in O\in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

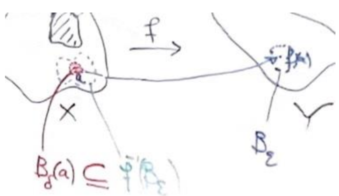
אז קיים $\epsilon>0$ כך ש $B_\epsilon(f(a))\subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n)\notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n)\notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n)\overset{\rho}{\nrightarrow}f(a)$.

<u>$(3)\Leftarrow(1)$:</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon>0$ נתון – $O=B_\epsilon(f(a))\in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O)=f^{-1}\left(B_\epsilon(f(a))\right)\in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a\in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta>0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f\left(B_\delta(a)\right) \subseteq f\left(f^{-1}(O)\right) \subseteq O = B_\epsilon\left(f(a)\right)$$

<u>הערה:</u> במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר:</u> $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

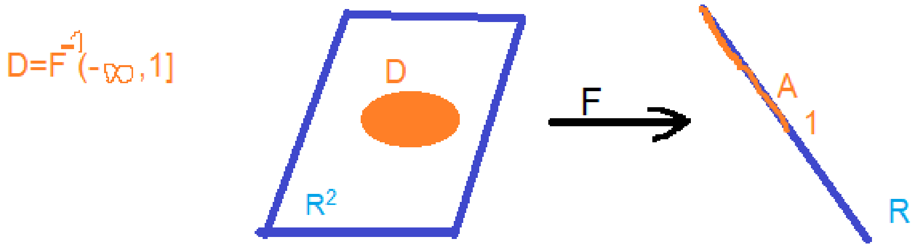
☺

<u>דוגמאות:</u>

1) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

<u>הסבר:</u> $F(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל –

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ - $D = F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d):

$$B_r[a] := \{x \in X | d(a,x) \le r\}$$

$$S_r(a) := \{x \in X | d(a,x) = r\}$$

סגורות!

<u>הסבר:</u>

נגדיר פו' $f_a: X \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a]$ גם סגור!

$f_a^{-1}(\{r\}) = S_r(a)$ גם סגור!

4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$B_r(A) := \{x \in X | d(x,A) < r\}$ פתוחה.

כאן יש צורך בפונקצית ליפשיץ $f_A(x) = d(x,A)$, $f_A: X \to \mathbb{R}$.

5) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R}) \overset{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

<u>הגדרות:</u> (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{m_1} \bar{A} = cl(A) := \{x \in X |\ d(x,A) = 0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{\text{סדרה קבועה תמיד מתכנסת!}} scl(A) := \left\{x \in X \middle| \exists a_n \in A: x = \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

<u>משפט 1:</u> בכל <u>מ"מ</u> תמיד $\boxed{scl(A) = cl(A)}$.

<u>הוכחה:</u> $(\subseteq)$: נניח $z \in scl(A)$ אז

$$\begin{cases} \exists a_n \in A \\ z = \lim_{n\to\infty} a_n \end{cases}$$

$$d(z, a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

$$0 \le d(z,A) \le d(z, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \Rightarrow d(z,A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

:($\supseteq$)

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A} d(z,a) = d(z,A) = 0$$

(לפי הגדרת inf)   נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le d(z,a_n) \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

מכאן $a_n \in A \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = z \in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב – X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A = cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

<u>**הוכחה:**</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0: B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$(2) \Leftarrow (3)$: בגלל משפט 1.

<u>$(3) \Leftarrow (4)$:</u>

נגדיר $f_A : X \to \mathbb{R}$ (רציפה!) $f_A(x) = d(x, A)$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון } 3} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f_A^{-1}(0)$ מקור של נקודון.

☺

<u>**הגדרה:**</u> במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' \coloneqq \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>**תרגיל:**</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A **עם איברים שונים** שמתכנסת ב X לנקודה z.

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש $d(z, A \backslash \{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

<u>**דוגמאות:**</u>

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

3) $A=[0,1] \subset \mathbb{R}$

אז

$$A' = A$$

<u>תכונות (במ"מ):</u> (לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

<u>הגדרה:</u> אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצת G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצת F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\forall n:$ סגורה P_n , $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$).

<u>הערה:</u> $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

<u>תרגיל:</u>

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי (X,d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

<u>הגדרה:</u> A נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

<u>דוגמאות:</u>

1) $A = (0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב - $X = \mathbb{R}$.

2) $A = [0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב - $X = \mathbb{R}$.

3) $A = [0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב - $X = \mathbb{R}$.

4) $\emptyset, \mathbb{R}$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

הערה: לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $\emptyset = X^c,\ X = \emptyset^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרה: מרחב (X,d) נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $\emptyset, X$.

הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**: אם קיים פירוק $X = X_1 \dot{\cup} X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset\ , X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in top(d)\ (\text{פתוחות}) \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

(שימו לב ש X_1, X_2 סגוחות לא טריוויאליות)

למשל: אם: $[2,4) \cup (5,\infty) = \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} \subset \mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2) = [2, 2.5) \subseteq [2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגוחה.

הסיקו ש $(\mathbb{Z}, d_p)$ לא קשיר.

משפט: (*תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם*)

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב X.

הוכחה: נניח (X,d) מ"מ ו (Y,d_Y) תת מרחב מטרי.

1. נניח y_n ס"ק ב (Y,d_Y). אז היא ס"ק גם ב (X,d) (מדוע ?). בגלל השלמות (X,d) יש גבול $y_n \xrightarrow{d} a \in X$ ב (X,d). אז $a \in scl_X(Y)$. נתון ש Y סגורה ב X. לפי משפט על הסגירות במ"מ $scl_X(Y) = Y$. לכן $a \in Y$.
   אז $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, y_n) = 0$. לכן גם $y_n \xrightarrow{d_Y} a \in Y$ (מדוע ?)

2. נניח בשלילה ש Y לא סגורה ב X. אז לפי משפט על הסגירות יש סדרה $y_n \in Y$ כך ש
   $a \notin Y$ $y_n \xrightarrow{d} a \in X$. אז נניח y_n ס"ק ב (X,d). להיות ס"ק תכונה תורשתית לכן גם ב (Y,d_Y). בגלל השלמות של (Y,d_Y) קיים גבול $y_n \xrightarrow{d_Y} a \in Y$. אבל אז גם $y_n \xrightarrow{d} a$. התקבלה סתירה. מכאן מש"ל ☺

פסח שמח !