משוואת לפלס בעיגול

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<R^2 \\ u=f(x,y), & x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$$

נעביר את הבעיה לקואורדינטות פולריות.

בש"ב נוכיח כי:

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

עבור:

$$x=r\cos(\theta)\ ,y=r\sin(\theta)$$

בשפה הקואורדינטות הן:

$$x=R\cos(\theta)$$

$$y=R\sin(\theta)$$

ולכן:

$$u(x,y)=f(x,y)$$

$$u(R\cos(\theta),R\sin(\theta))=f(R\cos(\theta),R\sin(\theta))=h(\theta)$$

ולכן:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 0\le r<R\ ,\theta\in[0,2\pi) \\ u(R,\theta)=h(\theta), & r=R,\theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

נכפיל ב - r^2:

$$\begin{cases} r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0, & 0\le r<R\ ,\theta\in[0,2\pi) \\ u(R,\theta)=h(\theta), & r=R,\theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

כעת נבצע הפרדת משתנים:

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

נציב במד"ח:

$$r^2R''(r)\Theta(\theta)+rR'(r)\Theta(\theta)+R(r)\Theta''(\theta)=0$$

$$\Theta(\theta)[r^2R''(r)+rR'(r)]=-R(r)\Theta''(\theta)$$

$$\boxed{\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\lambda}$$

מאחר ו - $\Theta \in C^2$ נקבל שהיא צריכה לקיים את:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi)\,, \dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}(2\pi)$$

לכן, נפתור תחילה עבור Θ:

$$\begin{cases} \dfrac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}(2\pi) \end{cases}$$

נשים לב כי אין לנו תנאי שפה מפורשים, ואלו נקראים <u>תנאי שפה מחזוריים</u>.

עבור $\lambda \le 0$ נקבל פתרון טריוויאלי (ניתן לבדוק).

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן:

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$$

נציב תנאי שפה:

$$\Theta(0) = c_1$$

$$\Theta(2\pi) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)$$

$$\boxed{c_1\left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)\right) - c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0}$$

נגזור:

$$\dot{\Theta}(\theta) = -c_1\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + c_2\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$$

נציב:

$$\dot{\Theta}(0) = c_2\sqrt{\lambda}$$

$$\dot{\Theta}(2\pi) = -c_1\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) + c_2\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)$$

$$\Downarrow$$

$$c_2\sqrt{\lambda} = -c_1\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) + c_2\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)$$

$$\boxed{c_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2\left(1-\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\right)=0}$$

כעת נסתכל על שתי המשוואות שלנו:

$$\begin{cases}c_1\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)\right)-c_2\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0\\ c_1\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+c_2\left(1-\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\right)=0\end{cases}$$

קיבלנו מערכת לינארית הומוגנית ולכן יש פתרון יחיד (פתרון האפס) או שיש אינסוף פתרונות. פתרון האפס נותן לנו ש - $c_1=c_2=0$ וזה המקרה הטריוויאלי. לכן נדרוש שיש אינסוף פתרונות, כלומר שהדטרמיננטה שווה ל – 0.

$$\begin{vmatrix}1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) & -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\\ \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & 1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)\end{vmatrix}=0$$

$$\left(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)\right)^2+\sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$$

$$1-2\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)+\cos^2(\sqrt{\lambda}2\pi)+\sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$$

$$2-2\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=1$$

$$\sqrt{\lambda}2\pi=2n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n=n^2}$$

אלו הע"ע. הפ"ע הם:

$$\boxed{\Theta_n(\theta)=a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)}$$

נחזור למשוואה עבור R:

$$-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-n^2$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0$$

קיבלנו את משוואת אוילר ולכן ננחש פתרון:

$$R(r)=r^\alpha$$

ונציב:

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+r\alpha r^{\alpha-1}-n^2r^\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0$$

$$\alpha^2-n^2=0$$

$$\alpha^2=n^2$$

$$\alpha = \pm n$$

נחלק למקרים:

<u>עבור $n \neq 0$:</u>

$$R_n(r) = r^n, R_n(r) = r^{-n}$$

<u>עבור $n = 0$:</u>

$$\alpha^2 = 0$$

$$\alpha = 0$$

קיבלנו ש - $\alpha = 0$ מריבוי 2. כעת:

$$R_0(r) = r^0 = 1$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0$$

$$\frac{R''(r)}{R'(r)} = -\frac{1}{r}$$

נסמן:

$$R'(r) = v(r)$$

ולכן:

$$\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{1}{r}$$

$$\ln\big(v(r)\big) = -\ln(r) + c$$

$$v(r) = \frac{c}{r}$$

ואז:

$$R'(r) = \frac{c}{r}$$

$$\boxed{R_0(r) = c\ln(r)}$$

נסכם את כל התוצאות:

$$R_0(r) = 1\,, R_0(r) = \ln(r)$$

$$R_n(r) = r^n\,, R_n(r) = r^{-n}$$

כעת נזכור כי $R(r) \in C^2$ בתוך העיגול שלנו אבל מתקיים ש:

$$\lim_{r\to 0} \ln(r) = -\infty$$

$$\lim_{r\to 0} r^{-n} = \infty$$

ולכן 2 תוצאות אלו לא יתקבלו ואז נקבל:

$$R_0(r) = 1\,, R_n(r) = r^n$$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

ואז נקבל את הטור שלנו:

$$u_n(r,\theta) = u_0(r,\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\theta)$$

כאשר:

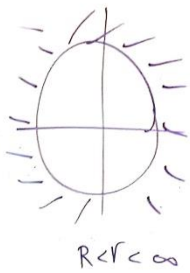
$$u_0(r,\theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = 1 \cdot a_0 = a_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$u_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = r^n[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

ואז:

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]}$$

<u>נסתכל על המשלים לעיגול שלנו:</u>



$$\lim_{r\to\infty} \ln(r) = \infty$$

$$\lim_{r\to\infty} r^n = \infty$$

ולכן פונקציות אלו לא מתקבלות בטור הסופי ונקבל:

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

<u>בטבעת במישור:</u>

נקבל במקרה זה שכל הפונקציות מתקבלות (אין בעיה של 0 או אינסוף) ולכן:

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] + r^{-n}[C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)]$$

<u>הערה:</u>

קיבלנו בסופו של דבר שעבור המשוואה:

$$\begin{cases} r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0, & 0\le r<R\,,\theta\in[0,2\pi) \\ u(R,\theta)=h(\theta), & r=R,\theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

נקבל את הטור:

$$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)]$$

באמצעות תנאי השפה הנתון נוכל למצוא את A_n ואת B_n:

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\,d\theta$$

$$B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת לפלס:

$$\begin{cases} \Delta u=0, & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)=y^2, & x^2+y^2=1 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נחליף לקואורדינטות פולריות:

$$x=\cos\theta$$

$$y=\sin\theta$$

קיבלנו:

$$u(1,\theta)=(\sin\theta)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

הפתרון שלנו ידוע והוא שווה ל:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

נחשב את המקדמים:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)=u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)$$

ולכן מהשוואת המקדמים נקבל:

$$a_0=1$$

$$a_2=-\frac{1}{2},b_2=0$$

$$\forall n\neq 0,2:a_n=b_n=0$$

ולכן:

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2\cos(2\theta)}$$

נחזור לקואורדינטות של x,y:

$$x=r\cos(\theta)\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{x}{r}$$

$$y=r\sin(\theta)\Rightarrow\sin(\theta)=\frac{y}{r}$$

ואז:

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=\frac{x^2-y^2}{r^2}$$

נציב ונקבל:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2\left[\frac{x^2-y^2}{r^2}\right]$$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}$$

פונקציה הרמונית בעיגול.

<u>בדיקה:</u> על השפה מתקיים:

$$x^2+y^2=1\Rightarrow x^2=1-y^2$$

ולכן על השפה מתקיים:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-y^2-y^2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+y^2=y^2$$

ואכן מתקיים וסיימנו.

■

הערה:

נוסחת פואסון:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{u\left(Re^{i\varphi}\right)}_{\text{פונקציה על השפה}}\cdot\underbrace{\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}}_{\text{גרעין פואסון}}\,d\varphi$$

מנוסחה זו מקבלים ש:

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{u\left(Re^{i\varphi}\right)}_{\text{פונקציה על השפה}}\,d\varphi$$

תרגיל:

מצא פונקציה הרמונית $u(x,y)$ בתוך העיגול $x^2+y^2<1$ אם על השפה נקבל x^3.

פתרון:

בעצם נרצה לפתור את משוואת לפלס:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x^2+y^2<1\\ u(x,y)=x^3, & x^2+y^2=1\end{cases}$$

נעבור לקואורדינטות פולריות בשפה:

$$x=\cos\theta\ ,y=\sin\theta$$

נקבל:

$$u(1,\theta)=\cos^3(\theta)$$

נוסחה טריגונומטרית:

$$\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)=\cos^3(\theta)$$

ולכן:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0\le r<1,\theta\in[0,2\pi)\\ u(x,y)=\frac{3}{4}\cos(\theta)+\frac{1}{4}\cos(3\theta)\end{cases}$$

לכן:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

נחשב את המקדמים:

$$\frac{3}{4}\cos(\theta)+\frac{1}{4}\cos(3\theta)=u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

נקבל ש:

$$a_0=0$$

$$a_1=\frac{3}{4},b_1=0$$

$$a_3=\frac{1}{4},b_3=0$$

$$\forall n\neq 0,1,3:a_n=b_n=0$$

ולכן:

$$u(r,\theta)=\frac{3}{4}r\cos(\theta)+\frac{1}{4}r^3\cos(3\theta)$$

נחזור למשתנים המקוריים שלנו:

$$\cos(\theta)=\frac{x}{r}$$

$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}$$

ואז:

$$u(x,y)=\frac{3}{4}r\cdot\frac{x}{r}+\frac{1}{4}r^3\left[4\frac{x^3}{r^3}-3\frac{x}{r}\right]=\frac{3}{4}x+x^3-\frac{3}{4}r^2x$$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{3}{4}x+x^3-\frac{3}{4}x(x^2+y^2)}$$

■

<u>תרגיל:</u>

מצא פונקציה הרמונית בעיגול $x^2+y^2\le R^2$ אם על השפה $u(x,y)=R+x$ ומצא את $u(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

נרצה לחשב את:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x^2+y^2<R^2\\ u(x,y)=R+x, & x^2+y^2=R^2\end{cases}$$

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \le r < R, \theta \in [0,2\pi) \\ u(R,\theta) = R + R\cos(\theta) \end{cases}$$

בשפה הרי מתקיים:

$$x = R\cos(\theta)$$

$$y = R\sin(\theta)$$

לכן:

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

על השפה:

$$R + R\cos(\theta) = u(R,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

לכן מהשוואת מקדמים:

$$a_0 = 2R$$

$$a_1 = 1, b_1 = 0$$

$$\forall n \neq 1,0 : \ a_n = b_n = 0$$

לכן:

$$u(r,\theta) = R + r\cos(\theta)$$

$$\boxed{u(x,y) = R + x}$$

ונשאר למצוא את $u(0,0)$:

$$u(0,0) = R$$

■

<u>מסקנה מהתרגיל:</u> אם הפונקציה על השפה היא כבר הרמונית, אז מהיחידות של בעיית דריכלה לאופרטור לפלס עם תנאי שפה דריכלה נקבל ש – u המבוקשת היא בדיוק הפונקציה על השפה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שאם u הרמונית ובעלת נגזרות חלקיות רציפות מכל סדר, אז גם u_x ו - u_y הרמוניות.

<u>פתרון:</u>

ידוע ש –

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

<u>צ"ל:</u>

$$(u_x)_{xx}+(u_x)_{yy}=0$$

לכן נגזור ונוכל להחליף סדר גזירה (נתון):

$$(u_{xx})_x+\left(u_{yy}\right)_x=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)_x=0$$

בדומה עבור y:

<u>צ"ל:</u>

$$\left(u_y\right)_{xx}+\left(u_y\right)_{yy}=0$$

ואז:

$$(u_{xx})_y+\left(u_{yy}\right)_x=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)_y=0$$

וסיימנו.

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת לפלס:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x^2+y^2<x+y\\ u(x,y)=y^2, & x^2+y^2=x+y\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש - $x^2+y^2<x+y$ הוא עיגול, לכן נסדר את המשוואה טיפה:

$$x^2+y^2-x-y<0$$

$$x^2-x+y^2-y<0$$

$$\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}}$$

מרכז המעגל הוא ב - $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ והרדיוס הוא $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

הקואורדינטות בשפה הם:

$$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

ולכן:

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

כעת נכתוב את המשוואה מחדש:

$$\begin{aligned}u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right)&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\end{aligned}$$

וההמשך בתרגול הבא...

■