

תרגיל 5 אנליזה הרמונית תש"ף

להגשה בשבוע שמתחיל ב"ז כסלו, 15.12

1. חשבו את טורי פורייה המרוכבים של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x \quad (\text{א})$$

$$f(x) = |x| \quad (\text{ב})$$

2. נסמן ב- $Re(z)$ את החלק הממשי של מספר מרוכב z . בטאו את מקדמי פורייה של $Re(f)$ באמצעות מקדמי פורייה של f (כאשר $f \in E[-\pi, \pi]$, כרגיל).
הדרכה: זכרו ש: $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.

3. תרגיל מעניין אך יחסית לא פשוט - לא להתבאס אם לא מצליחים. תהינה $f, g \in E[-\pi, \pi]$ ויהיו:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{inx}$$

טורי פורייה שלהן. נגדיר פונקציה h באופן הבא:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt$$

h רציפה למקוטעין (אין צורך להוכיח זאת, אך זה תרגיל נחמד בפני עצמו), ונסמן את טור פורייה שלה כך:

$$h(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

הוכיחו שמתקיים: $\gamma_n = \alpha_n \beta_n$.

הפונקציה h נקראת הקונבולוציה של f, g .

זכרו שהקבוצה $E[-\pi, \pi]$ היא קבוצת הפונקציות $\mathbb{C} \rightarrow [-\pi, \pi]$ שהן רציפות למקוטעין.