בס"ד

י"ט אלול תשס"ט, 8.9.09

חשבון אינפיניטיסימלי 2: 88-133-08

מועד ב'

זמן הבחינה: 120 דקות. חומר עזר אינו מותר למעט מחשבון פשוט. המבחן הוא בן שני עמודים.
משקל כל שאלה הוא 20 נקודות.

<u>חלק א' – ענה על שלוש שאלות מתוך הארבע:</u>

שאלה 1. תהא $f:[a,b]\to[c,d]$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו- $g(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[c,d]$. הוכח כי הפונקציה המורכבת $g(f(x))$ היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

<u>פתרון.</u>

עפ"י רימן צריך להראות שני תנאים:

1. $g\circ f$ חסומה בקטע $[c,d]$.
2. לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T עבורה: $\lambda(T)<\delta$ יתקיים: $\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right|<\varepsilon$.

g רציפה בקטע סגור ולכן חסומה בו. מכאן שגם הפונקציה המורכבת חסומה בקטע.

כמו כן, לכל תת-קטע $I_i=[x_{i-1},x_i]$ בכל חלוקה שהיא, נסמן:

$$M_i^f=\max_{I_i} f \text{ ו- } m_i^f=\min_{I_i} f \text{ כאשר: } \omega_i^f=M_i^f-m_i^f$$

ו- $\omega_i=M_i-m_i$ כאשר: $m_i=\min_{I_i} g\circ f$ המתקבל בנקודה: x_{i_m} ו- $M_i=\max_{I_i} g\circ f$ המתקבל בנקודה: x_{i_M}.

נחשב את: $\omega_i=g\left(f\left(x_{i_M}\right)\right)-g\left(f\left(x_{i_m}\right)\right)$.

עפ"י לגרנז', כיון ש- g גזירה בקטע $[c,d]$ קיימת נקודה c_i בין $f\left(x_{i_m}\right)$ ל- $f\left(x_{i_M}\right)$ בה:

$$g\left(f\left(x_{i_M}\right)\right)-g\left(f\left(x_{i_m}\right)\right)=\left(f\left(x_{i_M}\right)-f\left(x_{i_m}\right)\right)g'(c_i).$$

אבל g רציפה ב-$[c,d]$ ולכן היא מקבלת שם ערך מקסימלי $g'(c_M)$ ולכן:

$$g\left(f\left(x_{i_M}\right)\right)-g\left(f\left(x_{i_m}\right)\right)\le\left(f\left(x_{i_M}\right)-f\left(x_{i_m}\right)\right)g'(c_M).$$

מכאן נקבל בסה"כ את הקשר: $\omega_i \le \omega_i^f \cdot g'(c_M)$.

כעת כיוון ש- f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, לכל $\varepsilon > 0$ נמצא עבור $\varepsilon / g'(c_M)$ את δ כך שאם $\lambda(T) < \delta$

יתקיים: $\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i\right| < \varepsilon / g'(c_M)$ וכתוצאה מהקשר הנ"ל נקבל: $\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i\right| \le \left|g'(c_M) \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i\right| < \varepsilon$.

שאלה 2. תהא $\{f_n(x)\}$ סדרה של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ שמתכנסת לפונקציה גבולית $f(x)$ שם.

א. הוכח שאם ההתכנסות היא במידה שווה אז $f(x)$ רציפה בקטע.

ראה בהרצאה.

ב. הוכח או הפרך: אם $f(x)$ רציפה בקטע אז ההתכנסות היא בהכרח במידה שווה שם.

לא: למשל הסדרה $\{x^n\}$ מתכנסת לפונקצית גבול רציפה $f(x) = 0$ בקטע $[0,1)$ אך ההתכנסות שם

היא אינה במידה שווה. נראה זאת עפ"י מבחן ה- $\limsup$: $\sup_{[0,1)}\{|x^n|\} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \ne 0$.

שאלה 3. תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > 0$ כך ש: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ אך f אינה שווה זהותית לאפס

בקטע $(0,\infty)$. נגדיר סדרת פונקציות: $f_n(x) = f(nx)$. לאיזו פונקצית גבול היא מתכנסת? האם ההתכנסות היא במידה שווה?

פתרון: תחילה נחשב את פונקצית הגבול: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(nx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

<u>טענה</u>: ההתכנסות לאפס היא אינה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>: כיוון שהפונקציה אינה שווה זהותית לאפס, קיימת לפחות נקודה אחת $x_0 > 0$ בה: $f(x_0) \ne 0$. כעת אם

ניקח למשל עבור כל $n \in \mathbb{N}$ את הנקודה $x_n = \dfrac{x_0}{n}$ נקבל:

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{x_0}{n}\right) = f(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) \ne 0$$

ובפרט תנאי ה- $\limsup$ אינו מתקיים.

שאלה 4. תהא $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת במלבן $D = [-1,1]^2$ ונתון שלכל $y_0 \in [-1,1]$ קבוע הפונקציה

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ היא רציפה. נניח גם כי הנגזרת $f_y(x,y)$ קיימת וחסומה בכל D.

הוכח כי $f\left(x,y\right)$ רציפה ב- D.

פתרון: צ"ל שבכל נקודה $x_0,y_0\in D$ מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\ \wedge 0<\left|y-y_0\right|<\delta\ \Rightarrow\ \left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|<\varepsilon$$

נכתוב: $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|=\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_0\right)+f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|$.

נתון כי עבור כל $x\in\left[-1,1\right]$ קבוע הפונקציה: $\psi\left(y\right)=f\left(x,y\right)$ היא גזירה ונגזרתה חסומה בקטע $y\in\left[-1,1\right]$

ולכן עפ"י משפט לגרנז': $\psi'\left(y_0\right)=\dfrac{\psi\left(y\right)-\psi\left(y_0\right)}{y-y_0}\le C$ כלומר:

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_0\right)\right|=\left|\psi\left(y\right)-\psi\left(y_0\right)\right|\le C\cdot\left|y-y_0\right|.$$

מכאן שעבור $\varepsilon/2$ אם ניקח: $\delta_1<\dfrac{\varepsilon}{2C}$ נקבל: $\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_0\right)\right|\le C\cdot\dfrac{\varepsilon}{2C}=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

כמו כן נתון כי: $\varphi\left(x\right)=f\left(x,y_0\right)$ רציפה, ולכן בפרט עבור $\varepsilon/2$ קיימת $\delta_2>0$ כך ש:

$$\left|x-x_0\right|<\delta_2\ \ \Rightarrow\ \ \left|f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|<\varepsilon/2$$

על כן אם ניקח: $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$ נקבל עפ"י אי שוויון המשולש::

$$0<\left|x-x_0\right|<\delta\ \wedge 0<\left|y-y_0\right|<\delta\ \Rightarrow$$

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|\le\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,y_0\right)\right|+\left|f\left(x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

<u>חלק ב' – ענה על שתי שאלות מתוך השלוש:</u>

שאלה 5. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $f\left(x,y\right)=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$.

איזו תופעה מתרחשת כאן שאינה יכולה להתרחש במקרה של פונקציות של משתנה אחד ?

פתרון:

שאלה 6. א. קבע האם האינטגרל $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ מתכנס.

ב. קבע עבור אילו ערכי α האינטגרל $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

פתרון:

א. נתמקד באזור אחד בעייתי שבו האינטגרל מתבדר: למשל סביבה ימנית של $x=1$:

ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי: $\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\sin x}{x\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \sin 1 \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln x} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \xrightarrow{L'Hopital} \sin 1 \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1/x} = \sin 1$.

קיבלנו חברות. לכן כיוון שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ מתבדר גם שלנו מתבדר ואין טעם לבדוק בשאר מקומות.

ב. נפצל את האינטגרל לשני תחומים: $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$.

<u>האינטגרל הראשון</u>: ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-1}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

כלומר האינטגרל שלנו "חבר" של האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ שכידוע מתכנס עבור: $\alpha - 1 < 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha < 2$.

<u>האינטגרל השני</u>: כאן המבחן הגבולי נותן: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

כלומר החברות כאן היא עם $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ שכידוע מתכנס עבור $\alpha > 1$.

ולכן בסה"כ ההתכנסות היא עבור הערכים: $1 < \alpha < 2$.

שאלה 7. חשב את סכום הטור $S = \sum_{n=0}^\infty \frac{n^2}{2^n}$. נמק את צעדיך.

(<u>הדרכה</u>: אפשר לחשב: $S = \sum_{n=0}^\infty \frac{n^2 - n}{2^n} + \sum_{n=0}^\infty \frac{n}{2^n}$).

פתרון: נכתוב: $\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^\infty nx^n \Big|_{x=\frac{1}{2}}$ ונשים לב כי: $nx^n = x\cdot\left(x^n\right)'$.

לפיכך: $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)' = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{\left(1-x\right)^2}$.

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות ולפיכך גם הרדיוס של טור הנגזרות הוא $R=1$ (משפט).

לכן המעבר מטור של נגזרות לגזירה של הטור היה מוצדק בתחום הסגור $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ שהוא כולו מוכל בתחום ההתכנסות טור הנגזרות מתכנס במידה שווה.

באותו האופן נשים לב כי: $\left(x^n\right)'' = n\left(x^{n-1}\right)' = n\left(n-1\right)x^{n-2}$ ומכאן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)x^n = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)'' = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = x^2\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x^2}{\left(1-x\right)^3}$$

לכן בתחום $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ נקבל בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{2x^2}{\left(1-x\right)^3} + \frac{x}{\left(1-x\right)^2} = \frac{2x^2+x\left(1-x\right)}{\left(1-x\right)^3} = \frac{x^2+x}{\left(1-x\right)^3}$$

החיבור הזה מותר שכן שני הטורים מתכנסים בהחלט בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ שהוא בתוך רדיוס ההתכנסות ולכן מותר

לסכום את סך האיברים בכל סדר. נקבל: $S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = \left.\frac{x\left(x+1\right)}{\left(1-x\right)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$.