83-110 אלגברה ליניארית תשס"ז
מועד א', 16.2.07, יונתן בק פתרונות

מס. מחברת שלי________.

משך הבחינה 2.5 שעות. לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה לפתרון. יש לנמק כל חישוב שנדרש. חומר עזר ומחשבי כיס אינם מותרים. כל סעיף שווה 5 נקודות.

<u>הציגו את הפתרונות על השאלון הזה בלבד</u>

המחברת מיועדת לחישובים בלבד ולא ייבדק. מקום הנתון לכל שאלה הוא רמז גדול למקום הנדרש לכתוב פתרון. בהצלחה!!

1. נניח ש A היא המטריצה ה 3×4 ו $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ הווקטור כדלקמן:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\3&2&7&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

a. תן/י הסבר לזה שיש פתרון למערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

מתקיים ש $\mathbf{b}\in C(A)$. באופן מפורש $\mathbf{b}=\frac{1}{3}\mathbf{a}_1+\frac{2}{3}\mathbf{a}_4$.

b. מצא/י בסיס למרחב האפס $N(A)$ והעזר בו לכתוב את הפתרון הכללי למערכת?

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\3&2&7&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

כך ש $N(A)=\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, מסעיף a. פתרון פרטי

נתון על ידי $\mathbf{x}_p=\begin{bmatrix}1/3\\0\\0\\2/3\end{bmatrix}$. הפתרון הכללי הוא $\mathbf{x}=\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_n$ כאשר $\mathbf{x}_n\in N(A)$.

c. מצא/י בסיס למרחב העמודות של A.

בסיס ל $C(A)$ ניתן על ידי עמודות הציר של A, $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ ו $\mathbf{a}_4$.

d. מה הממד של $N(A^T)$ מרחב האפס השמאלי של A?

$$\dim N(A^T)=m-r=3-3=0$$

.2

a. תהי A מטריצה $m\times n$. תהי B מטריצה $n\times p$. הסבר/י למה מרחב העמודות של AB מוכל במרחב העמודות של A.

כל עמודה של AB היא צירוף ליניארי של עמודות של A ולכן במרחב $C(A)$.

b. תהי A מטריצה $m\times n$. הוכח או הפרך: $\dim N(A^TA)=\dim N(A)$.

אם $\mathbf{x}\in N(A)$ יש $A\mathbf{x}=\mathbf{0}_m$ כך ש $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{0}_m=\mathbf{0}_n$. לכן $\mathbf{x}\in N(A^TA)$. וגם ההפך נכון, אם $\mathbf{x}\in N(A^TA)$ אז $A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0}_n$ ו $\|A\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{0}_n=0$. האורך של וקטור שווה 0 רק עבור וקטור $\mathbf{0}_m$. כך ש $A\mathbf{x}=\mathbf{0}_m$ ו $\mathbf{x}\in N(A)$. שני הכיוונים מראים ש $N(A)=N(A^TA)$ וגם הממדים שלהם שווים.

c. תהי A מטריצה $m\times n$. המשוואות הנורמליות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ניתנות על ידי המערכת $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b}$. הסבר/י למה תמיד יש פתרון למערכת הנורמלית.
(רמז: דרך פשוטה להסביר את זה הוא להיעזר ב.b להראות ש$A^T\mathbf{b}\in C(A^TA)$.)

כפי שהוסבר ב.a יש $C(A^TA)\subset C(A^T)$. בנוסף, מסעיף b. $\dim C(A^TA)=\dim C(A)=r$ כיוון ש $\dim C(A^T)=\dim C(A)=r$ גם נובע ש $C(A^TA)=C(A^T)$. כיוון ש $A^T\mathbf{b}\in C(A^T)$ כי הוא צירוף ליניארי של עמודות A^T נובע ש $A^T\mathbf{b}\in C(A^TA)$ ולכן ניתן לפתור $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b}$.

d. האם מטריצת היטל היא תמיד סימטרית? הסבר/י.

כל מטריצת היטל היא מהצורה $P=QQ^T$ עבור Q אורתונורמלי ולכן P סימטרי.

3. תהי $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}$.

a. מצא/י בסיס אורתונורמלי למרחב העמודות $C(A)$ של A.

$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ו $\mathbf{x}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. אחרי נרמול יש

$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

b. בהיעזר a., כתב/י את מטריצה P שמטילה את $\mathbb{R}^3$ על מרחב העמודות $C(A)$.

נכתוב $Q=[\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3}&0\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ ואז $P=QQ^T=\begin{bmatrix}5/6&1/3&-1/6\\1/3&1/3&1/3\\-1/6&1/3&5/6\end{bmatrix}$

c. מה המרחק בין $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$ ותת-המרחב V?

$\mathbf{e}=\mathbf{b}-P\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$ והמרחק שווה $\|\mathbf{e}\|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$.

d. מצא/י בסיס למרחב האפס השמאלי $N(A^T)$.

$N(A^T)=\text{Span}\{\mathbf{e}\}$ ובסיס ניתן על ידי $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$.

4. תהי A_n המטריצה ה $n\times n$ עם 1-ים על האלכסון באלכסון המשני מעל האלכסון, ו -1 מתחת לאלכסון הראשי , ו0-ים בשאר המקומות:

$$A_1=[1],\ A_2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}, \ldots, A_n=\begin{bmatrix}1&1&&0&0\\-1&1&1&\mathbf{0}&0\\&-1&\ddots&\ddots&\\0&\mathbf{0}&\ddots&1&1\\0&0&&-1&1\end{bmatrix}.$$

a. מצא/י נוסחה מן הצורה $|A_n|=a|A_{n-1}|+b|A_{n-2}|$.

בשימוש פיתוח קו-פקטורים לפי שורה הראשונה מתקיים:

$|A_n|=|A_{n-1}|+|A_{n-2}|$ כך ש $a=1,b=1$.

b. מצא/י $|A_2|$ ו $|A_3|$ והשתמשו בהם למצוא $|A_9|$.

$|A_2|=2,|A_3|=3$ ולכן הסדרה $|A_n|$ מקיים $|A_n|=|A_{n-1}|+|A_{n-2}|$ כך שהיא סדרת פיבונצ'י.

$|A_4|=5$, $|A_5|=8$, $|A_6|=13$, $|A_7|=21$, $|A_8|=34$, ולכן $|A_9|=55$.

תהי C_n המטריצה הזהה ל A_n חוץ מאשר באלכסון שיש 0-ים. כך ש:

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \ddots & -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \mathbf{0} & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ ובפרט עבור $n=3$ $$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. מה הערכים העצמיים של C_3? שימו לב: הם מספרים מרוכבים.

$$\left|C_3 - \lambda I_3\right| = \left\|\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right\| = -\lambda\left(\lambda^2+1\right) - \lambda = -\lambda\left(\lambda^2+2\right)$$ ולכן הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}i, \lambda_3 = -\sqrt{2}i$, כאשר $i = \sqrt{-1}$.

d. בשימוש c. והעובדה ש $A_n = C_n + I_n$ (A_n לעיל) כתב/י את הערכים העצמיים של A_3.

כיוון שכל וקטור הוא וקטור עצמי של I_n, נובע שהווקטורים העצמיים של A_n הם זהים לווקטורים העצמיים של C_n, רק שמוסיפים 1 לכל ערך עצמי, כי $A\mathbf{x}_k = \left(\lambda_k + 1\right)\mathbf{x}_k \Leftrightarrow C\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$.

הערכים העצמיים של A_3 הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+\sqrt{2}i, \lambda_3 = 1-\sqrt{2}i$.

e. האם קיימים שלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניאריים עבור A_3? הסבר/י

כן, כי יש ל A_3 שלושה ערכים עצמיים שונים ולכן הווקטורים העצמיים שלהם הם בת"ל.

5. בהרצאה טיפוסית שלי מגיעים כ 100 סטודנטים. בכל דקה נתונה 5% מהסטודנטים שאינם מדברים חושבים על משהו חשוב להגיד לשכנים שלהם ומתחילים לדבר.

באותו רגע 10% מהסטודנטים שכבר מדברים מסיימים את המחשבה שלהם ושותקים.

בתחילת ההרצה כל הסטודנטים שקטים ☺. נסמן ב Q_k מספר הסטודנטים מתוך 100 שאינם מדברים בדקה ה k-ית ובו T_k מספר הסטודנטים שמדברים בדקה ה k-ית.
ההרצאה ממשיכה כ 90 דקות. ווקטור מצב הדיבורים בדקה ה k של ההרצאה נסמן ב $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} Q_k \\ T_k \end{bmatrix}$.

a. מהו $\mathbf{u}_0$? רשום את מטריצת המעבר A בין ווקטור המצב $\mathbf{u}_k$ בדקה ה k ווקטור המצב $\mathbf{u}_{k+1}$ בדקה ה $k+1$, עבור $k = 0,1,2,\ldots$.

$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} .95 & .1 \\ .05 & .9 \end{bmatrix}$, כך ש $\overbrace{\begin{bmatrix} Q_{k+1} \\ T_{k+1} \end{bmatrix}}^{\mathbf{u}_{k+1}} = \begin{bmatrix} .95 & .1 \\ .05 & .9 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} Q_k \\ T_k \end{bmatrix}}^{\mathbf{u}_k}$.

b. מצא/י לכסון $A = SDS^{-1}$ עבור A.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = .85$ הם הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים הם $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, כך ש

$S = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$, ו $A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .85 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)$.

c. מה הגבול $\lim_{k\to\infty} A^k$?

$A^k = SD^kS^{-1} = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (.85)^k \end{bmatrix} S^{-1}$, ולכן כאשר $k \to \infty$, מקבלים ש:

$A^\infty := \lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d. אחרי 80 דקות כמה סטודנטים מדברים? (העזר/י באי-שוויון ש $(0.85)^{80} < .005$ ועגל את תשובתך).

$\mathbf{u}_{80} = A^{80} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 67 \\ 33 \end{bmatrix}$ ולכן 33 מדברים.