פתרון מבחן דמה תשע"ז

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)\sin(e^x)\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\sin(e^x)\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}=1\cdot 1\cdot\sin(1)\cdot 1\cdot 2=2\sin(1)$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2^{n^2}}$$

$$\frac{7^n}{2^{(n^2)}}=\left(\frac{7}{2^n}\right)^n\to 0^\infty=0$$

א. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

קל לבדוק שהסדרה הכללית שואפת לאפס, ולכן נמשיך.

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

כיוון ש $\pi > 1 > \frac{1}{n^2} > 0$ אז $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$

נעשה מבחן השוואה עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\to 1$$

לכן הם חברים, וכיוון שהטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, יוצא שהטור בשאלה מתכנס בהחלט!

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$

קל לוודא כי האיבר הכללי של הטור שואף לאפס לפי סדרי גודל, לכן נמשיך.

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum\frac{\ln(n)}{n}\geq\sum\frac{1}{n}$$

(החל מ$n=3>e$)

לכן הטור אינו מתכנס בהחלט.

נרצה לומר שהוא מתכנס בתנאי לפי לייבניץ, אך צריך לוודא:

$$\frac{\ln(n)}{n}\to 0$$

$\frac{\ln(n)}{n}$ מונוטונית

את שני הדברים נעשה באמצעות חקירת פונקציות!

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

לפי סדרי גודל, ולכן גם אם נציב את הסדרה $n\to\infty$ נקבל כי $f(n)\to 0$ לפי היינה.

כעת נחקור תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

הסימן נקבע ע"י המונה כי המכנה חיובי.

בתחום (e,∞) המונה שלילי ולכן הנגזרת שלילית, והפונקציה יורדת.

לכל לכל $n>e$ מתקיים שכיוון ש $n+1>n>e$

$$f(n+1)<f(n)$$

והוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת אחרי $n=3$.

מספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הטור.

ולכן הטור מתכנס לפי לייבניץ, וכיוון שלא מתכנס בהחלט הוא סה"כ מתכנס בתנאי.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$$\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

כעת קל לראות שהאיבר הכללי שואף לאפס ולכן נמשיך.

אמנם מבחן השוואה גבולי הוא הדבר החכם ביותר לעשות, אך בואו נעשה טריק

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}+n}=\frac{1}{3n}$$

והטור $\sum\frac{1}{3n}$ מתבדר, ולכן גם הטור שלנו מתבדר.

3. תהי סדרה חיובית a_n ויהי קבוע $2<d\in\mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $d\leq\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

כמו כן, נתון כי $a_1<a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

סעיף א' ננסה להוכיח באינדוקציה

בדיקה: נתון $a_1<a_2$

יהי n עבורו $a_n<a_{n+1}$

צ"ל כי $a_{n+1}<a_{n+2}$

כיוון שהסדרה חיובית בעצם נתון כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$

צ"ל

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}>1$$

מהנתון אנחנו למדים כי

$$2<d\leq\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

ולכן

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\geq 2-\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

אבל אנחנו יודעים ש $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ ולכן

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq 2 - \frac{a_n}{a_{n+1}} > 2 - 1 = 1$$

סעיף ב':

אם a_n חסומה, אז כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

כיוון שלכל n מתקיים כי

$$d \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

נובע כי הגבול של הביטוי הימני גדול או שווה לd

$$\lim \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \left\{\frac{L+L}{L}\right\} = ?$$

אם $L \neq 0$ נקבל כי הגבול הוא 2

ולכן $d \leq 2$ בסתירה! ולכן במקרה זה a_n אינה חסומה ולכן $a_n \to \infty$

אבל האם ייתכן ש$L = 0$? לא. כי הסדרה עולה ולכן $L \geq a_1 > 0$.

סה"כ $a_n \to \infty$

.4

א. תהיינה שתי פונקציות f, g הגזירות בקטע A, כך ש $\forall x \in A : f'(x) = g'(x)$.
כמו כן, נתון כי קיימת נק' $a \in A$ עבורה $f(a) = g(a)$.
הוכיחו כי $\forall x \in A : f(x) = g(x)$.

ב. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
תזכורת: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

לכן הפונקציה יורדת בקטע A וגם עולה בקטע A ולכן היא קבועה.

$$h(x) \equiv C$$

נציב את $x = a$ ונקבל $C = h(a) = f(a) - g(a) = 0$

ולכן לכל נקודה $x \in A$ מתקיים כי $h(x) = 0$ ולכן $f(x) = g(x)$.

סעיף ב'

בעזרת סעיף א', נראה ששתי הפונקציה שוות בנקודה אחת בקטע $(0, \infty)$ וכן נגזרותיהן שוות בקטע זה ולכן סיימנו.

$$x = 1$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

כעת נוכיח שהנגזרת שווה בקטע

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

זו בדיוק הנגזרת של הפונקציה הקבועה $\frac{\pi}{2}$ וסיימנו.

הערה קצרה מאינפי 2:

נניח אני רוצה לחשב את $\arctan(3)$

נפתח טור טיילור

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

נעשה אינטגרל מ0 עד x

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

עבור $x = 3$ הטור אינו מתכנס והשוויון אינו נכון!

לפי התרגיל האחרון

$$\arctan(3) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

ו$x = \frac{1}{3}$ כן מותר להציב בטור!

לגבי $\ln(3)$ אומרים שזה $-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

5. תהי פונקציה f רציפה בכל $\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)=0$.

א. הוכיחו כי f חסומה מלרע.

ב. הוכיחו/הפריכו: f מקבלת בהכרח מינימום.

נב"ש שהפונקציה אינה חסומה מלרע, לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת נקודה $a_n \in \mathbb{R}$ עבורה

$$f(a_n) < -n$$

לכן לפי חצי סנדביץ'

$$f(a_n) \to -\infty$$

ניקח תת סדרה מונוטונית a_{k_n}

$$f\left(a_{k_n}\right) \to -\infty$$

שלוש אפשרויות:

1. $a_{k_n} \to \infty$
2. $a_{k_n} \to -\infty$
3. $a_{k_n} \to c \in \mathbb{R}$

באפשרות אחת נקבל מהנתון (הגבול מימין) ש $f\left(a_{k_n}\right) \to \infty$ בסתירה

באפשרות שתיים נקבל מהנתון (הגבול משמאל) ש $f\left(a_{k_n}\right) \to 0$ בסתירה

באפשרות שלוש נקבל מהנתון (הרציפות) ש $f\left(a_{k_n}\right) \to f(c)$ בסתירה

סעיף ב' – הפרכה e^x

קל לוודא שמקיימת את תנאי השאלה, ואין לה מינימום כי היא שואפת לאפס ואף פעם לא שווה לאפס.