

2. תהינה A_1, A_2, \dots, A_n קבוצות. הוכיחו: $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n = \{x \mid x \text{ in odd number of sets } A_i\}$.
 כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי-זוגי של קבוצות מתוך A_1, A_2, \dots, A_n .
 בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ ברור כי מתקיים התנאי.
 נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי:

$$\begin{aligned}
 A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n \Delta A_{n+1} &= (A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n) \Delta A_{n+1} = \\
 &= \{x \mid (x \in (A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n) \wedge x \notin A_{n+1}) \\
 \Rightarrow \text{according to the assumption } x \text{ in odd number of } A_i & \\
 \text{or} & \\
 (x \in A_{n+1} \wedge x \notin (A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n)) & \\
 \Rightarrow \text{than } x \text{ in one grupe + even number} & \\
 \text{of grupes from } A_i \text{ (according to the assumption)} & \}
 \end{aligned}$$

הסבר: טעות נפוצה היא לטעון כך: $x \in A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n \Delta A_{n+1}$ אזי או ש-
 $x \in A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת
 האינדוקציה (שזה נכון). או ש- $x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n$ ולכן הוא נמצא
 בקבוצה אחת מספר אי זוגי. **זה לא נכון**, כי: מהטענה ש- $x \notin A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n$
 לא נובע ש- x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות
 בהפרש). מה שכן אפשר לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \Delta A_2 \cdots \Delta A_n$
 אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות A_1, A_2, \dots, A_n . ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם
 במספר זוגי של הקבוצות A_1, A_2, \dots, A_n (0 הוא מספר זוגי) סה"כ x נמצא במספר
 אי זוגי של קבוצות.

3. יהי A פסוק. נגדיר באינדוקציה את הפסוקים הבאים

$$P_0 = A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n = \neg P_{n-1} \vee A$$

הוכח:

א. לכל n אי זוגי P_n טאוטולוגיה.

ב. לכל n זוגי $P_n \equiv A$.

פיתרון

א. בסיס: עבור $n = 1$ אנחנו מקבלים את הפסוק $\neg A \vee A$ שהוא טאוטולוגיה.
צעד: נניח נכונות עבור n אי־זוגי ונוכיח עבור $n + 2$:

$$P_{n+2} = \neg P_{n+1} \vee A = \neg(\neg P_n \vee A) \vee A = (P_n \wedge \neg A) \vee A = (T \wedge \neg A) \vee A = \neg A \vee A = T$$

נסביר את המעברים (משמאל לימין): המעברים הראשון והשני זה ישירות מההגדרה האינדוקטיבית. המעבר השלישי זה דה־מורגן. הרביעי זה השימוש בהנחת האינדוקציה. החמישי נובע מטבלת האמת של "וגם". המעבר השישי והאחרון היה בתרגול כשדיברנו על טאוטולוגיה.

ב. בסיס: עבור $n = 0$ זה לפי ההגדרה (כן, אפשר להתחיל אינדוקציה גם מאפס).
צעד: נניח נכונות עבור n זוגי ונוכיח עבור $n + 2$:

$$P_{n+2} = \neg P_{n+1} \vee A = \neg(\neg P_n \vee A) \vee A = (P_n \wedge \neg A) \vee A = (A \wedge \neg A) \vee A = F \vee A = A$$

הסבר המעברים: הראשון עד הרביעי (כולל) כמו בסעיף א. החמישי והשישי נובעים מטבלאות האמת של "וגם" ו"או".