# 10. תבנית יסודית שנייה, משפט Egregium

העקמומיות של עקומה $C=\{y=f(x)\}$ מוגדרת $k_C=|f''(x_0)|\geq 0$. ההסיאן הוא

$$H_f=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

עקמומיות גאוס היא

$$k_M=\det(H_f)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

אם

$$W_p:T_p\to T_p$$

אז

$$k_p=\det(W_o)=k_1k_2$$

## 10.1 תבנית יסודית שנייה

### הגדרה

התבנית היסודית השנייה $II_p$ היא תכנית ביליאנרית על מישור המשיק $T_p$:

$$II_p:T_p\times T_p\to\mathbb{R}$$

מוגדרת לכל $u,v\in T_p$ ע"י נוסחה

$$II_p(u,v)=-\langle\nabla_u N,v\rangle$$

($II_p(u,v)=-\langle W_p(u),v\rangle$)

### הגדרה

מקדמים $L_{ij}$ של ל$II_p$ מוגדרים ע"י

$$L_{ij}=II_p(x_i,x_j)\qquad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

## למה

מקדמים $L_{ij}$ מקיימים

$$L_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, n \right\rangle$$

לכן $L_{ij}$ סימטרי באינדקסים:

$$L_{[ij]} = 0$$

### הוכחה

$$L_{ij} = -\left\langle \nabla_{x_i} N, x_j \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \left( n \left( u^1, u^2 \right) \right), x_j \right\rangle =$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{=} -\frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle n, x_j \right\rangle + \left\langle n, \frac{\partial}{\partial u^i} \left( x_j \right) \right\rangle = \left\langle n, x_{ij} \right\rangle$$

## משפט

מקדמים $L_{ij}$ מופיעים בנוסחה

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$$

### הוכחה

נכתוב

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + C_n$$

אזי

$$\left\langle x_{ij}, n \right\rangle = \Gamma_{ij}^k \underbrace{\left\langle x_k, n \right\rangle}_{=0} + C \underbrace{\left\langle n, n \right\rangle}_{=1}$$

אבל לפי הלמה $L_{ihj} = \left\langle x_{ij}, n \right\rangle$, ולכן

$$L_{ij} = C$$

## 10.2 קווים גיאודזים ותבנית יסודית שנייה

### משפט

יהי $\beta(s)$ קו גיאודזי במהירות יחידה על משטח $M$ במרחב $\mathbb{R}^3$. אזי $\beta'(s)$ הוא וקטור משיק למשטח $M$: $\beta'(s) \in T_pM$ כאשר $p = \beta(s)$. אזי

$$\left|II_p\left(\beta'(s), \beta'(s)\right)\right| = k_\beta(s)$$

#### הוכחה

$$\beta = x \circ \alpha$$

לפי הגדרה,

$$k_\beta(s) = \left\|\beta''(s)\right\| = \left\|\left(\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^k \alpha^{i'} \alpha^{j'}\right) x_k + L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'} n\right\| = \dots$$

זה קו גיאודזי, לכן $\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^k \alpha^{i'} \alpha^{j'} = 0$

$$\dots = \left|L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'} n\right| = \left|L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'}\right| \|n\| = \left|L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'}\right|$$

מצד שני,

$$II_p\left(\beta'(s), \beta'(s)\right) \overset{\substack{\text{chain} \\ \text{rule}}}{=} II_p\left(x_i \alpha^{i'}, x_j \alpha^{j'}\right) =$$

$$= \alpha^{i'} \alpha^{j'} II_p\left(x_i, x_j\right) = \alpha^{i'} \alpha^{j'} L_{ij}$$

לכן

$$\left|II_p\left(\beta', \beta'\right)\right| = k_\beta(s)$$

### בילינאריות

למה $II_p$ היא בילינארית?

$$II_p(u, v) = \langle \nabla_u N, v \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{\nabla_{\alpha u + \beta v}(F) = \alpha \nabla_u F + \beta \nabla_v F}$$

## משפט

קיים הקשר הבא בין תבנית יסודית שנייה לבין העתקה Weingarten:

$$L_{ij} = -L^k{}_j g_{ki}$$

### הוכחה

$$L_{ij} = -\langle W_p(x_i), x_j\rangle = -\left\langle L_i^k x_k, x_j\right\rangle = -L^k{}_i \underbrace{\langle x_k, x_j\rangle}_{g_{kj}}$$

$$L_{ij} = -L_i^k g_{ki}$$

אבל

$$L_{ij} = L_{ji}$$

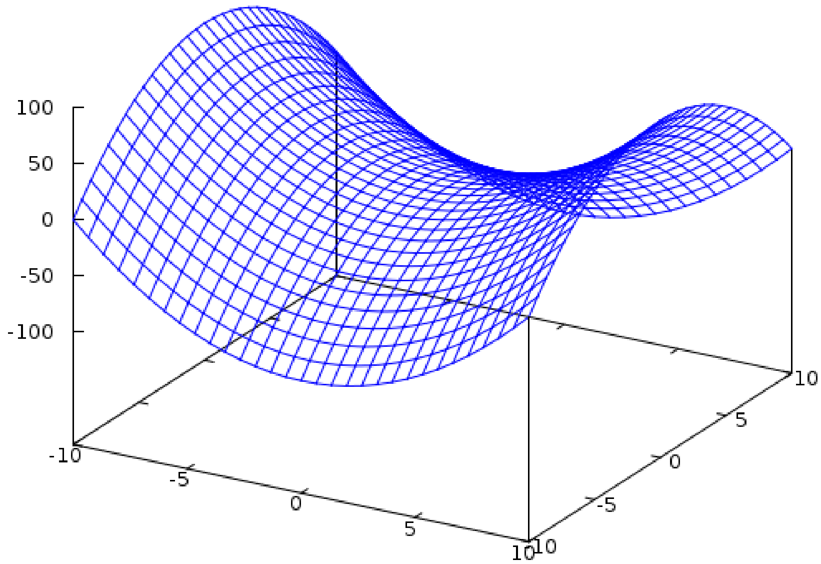
לכן

$$L_{ji} = -L_i^k g_{kj}$$

$$L_{ij} = -L_j^k g_{ki}$$

## דוגמה

גרף של פונקציה $f(x,y) = x^2 - y^2$




$$x\left(u^{1},u^{2}\right)=\left(u^{1},u^{2},f\left(u^{1},u^{2}\right)\right)$$

$$x_{1}=(1,0,f_{x})\qquad x_{2}=(0,1,f_{y})$$

בנקודה קריטית ($\nabla f=0$)

$$x_{1}=e_{1}\qquad x_{2}=e_{2}$$

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

לכן בנקודה קריטית

$$L_{1}^{1}=-L_{11}$$

$$L_{2}^{2}=-L_{22}$$

$$L_{2}^{1}=-L_{12}$$

$$L_1^2 = -L_{21}$$

$$k = \det(W) = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$$

$$x_{11} = (0,0,f_{xx}) \qquad x_{22} = (0,0,f_{yy}) \qquad x_{12} = (0,0,f_{xy})$$

$$L_{ij} = \left\langle \overbrace{n}^{=e_3}, x_{ij} \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^j}$$

$$(L_{ij}) = H_f$$

לכן $k = \det(H_f)$ בנקודה קריטית של $f$.

## 10.3 שלוש נוסחאות לעקמומיות Gauss

### משפט

קיימות שלוש נוסחאות ל$k$

(א) $$k = \det\left(L_j^i\right) = L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2 = 2L_{[1}^1 L_{2]}^2$$

(ב) $$k = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

(ג) $$k = -\frac{2}{g_{11}L_{1[1}L_{2]}^2} = \boxed{-\frac{1}{g_{11}}\left(L_{11}L_2^2 - L_{12}L_1^2\right)}$$

### הוכחה

(א) היא ההגדרה

(ב) נשתמש בנוסחה

$$L_{ij} = -L_j^k g_{ki} = -g_{ik}L_j^k$$

$$A = (L_{ij}) \qquad B = (g_{ij}) \qquad C = \left(L_j^k\right)$$

$$A = -BC$$

לפי כיפליות של det

$$\det(A) = \det(B)\det(C)$$

לכן...

(ג)

$$-\frac{1}{g_{11}}\left(L_{11}L_2^2-L_{12}l_1^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{g_{11}}\left(-L_1^k g_{k1}L_2^2+L_2^k g_{k1}L_1^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{g_{11}}\left(-L_1^1 g_{11}L_2^2-L_1^2 g_{21}L_2^2+L_2^1 g_{11}L_1^2+L_2^2 g_{21}L_1^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\cancel{g_{11}}}\left(-L_1^1L_2^2\cancel{g_{11}}+L_2^1L_1^2\cancel{g_{11}}\right)=$$

$$=L_1^1L_2^2-L_2^1L_1^2=k$$

### הערה

$\left(L_j^i\right)$ לא סימטרית!!! $L_2^1\neq L_1^2$

## 10.4 עקמומיויות ראשיות

### הגדרה

עקמומיויות ראשיות $k_1$ ו-$k_2$ של משטח $M$ בנקודה $p\in M$ הן ערכים עצמיים של $W_p$

### הערה

$k_1$ ו-$k_2$ הן ממשיים בגלל שהעתקה Weingarten היא צמודה לעצמה(self adjoint)

$$\langle T(u),v\rangle=\langle u,T(v)\rangle$$

### משפט

עקמומיות Gauss היא כפל של עקמומימויות ראשיות

### הוכחה

$$k=\det\left(W_p\right)=k_1k_2$$

## משפט

יהי $v \in T_p$ וקטור יחידה שהוא וקטור עצמי השייך לעקמומיות ראשית $k$.
יהי $\beta(s)$ קו גיאודזי המקיים $\beta(0) = p, \beta'(0) = v$.
אזי עקמומיות של $\beta(s)$ בתור עקומה ב$\mathbb{R}^3$ מקיימת

$$k_\beta(0) = |k|$$

### הוכחה

אם $\beta(s)$ הוא קו גאודזי, אזי

$$\beta''(s) = L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n$$

לכן

$$k_\beta(0) = \|\beta''(0)\| = \left\|L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n\right\| = \left|L_{ij}\alpha^{i'}(0)\,\alpha^{j'}(0)\right|$$

מצד שני, אם $v = x_1v^1 + x_2v^2$ הוא ווקטור עצמי של ערך עצמי $k$ אזי $W_p(v) = kv$, לכן

$$k = \|k_v\| = \|W(v)\|$$

$$\boxed{L^i_jv^j = kv^i}$$

$$k_\beta = L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = L_{ij}v^iv^j = -L^m_jg_{mi}v^iv^j = \underbrace{-L^m_jv^j}_{-k}g_{mi}v^i = -k\langle v,v\rangle = -k$$

$$\langle v,v\rangle = \left\langle v^ix_i, v^jx_j\right\rangle = v^iv^j\langle x_i,x_j\rangle$$

$$\|v\|^2 = v^iv^jg_{ij}$$

## מסקנה

עד כדי סימן, עקמומיות Gauss בנקודה היא כפל של עקמומיויות של שני קווים גיאודזים מאונכות בנקודה $p$, שוקטורים משיקים שלהם הם וקטורים עצמיים של העתקת Weingarten ב$p$.

## משפט

עד כדי סימן, עקמומיות Gauss בנקודה $p \in M$ היא כפל של עקמומיויות של שתי עקומות המתקבלות כחיתוך בין $M$ לבין מישור דרך $p \in \mathbb{R}^3$ המכיל ווקטור נורמלי $n$.

נסמן שני מישורים כאלה $\begin{matrix} A = \operatorname{span}(n_1, v_1) \\ B = \operatorname{span}(a_2, v_2) \end{matrix}$ . העקומות ההמתקבלות מחיתוך איתם הן $\begin{matrix} \beta_1 = M \cap A \\ \beta_2 = M \cap B \end{matrix}$ . אזי

$$\boxed{|k_m| = k_{\beta_1} k_{\beta_2}}$$