תבניות דיפרנציאליות

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$. תבנית־k דיפרנציאלית, $0 \le k \le n$.
תבנית 0 ־ פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{R}$

הגדרה

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. העתקה

$$\omega : \Omega \to \Lambda\left(\mathbb{R}^n\right)$$

נקראת תכנית־1 דיפרנציאלית.

הגדרה

פונקציה לינארית על $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה מהצורה

$$\varphi\left(\xi_1, ...\xi_n\right) = c_1\xi_1 + ... + c_n\xi_n, \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

$$\pi_i\left(\xi_1, ...\xi_n\right) = \xi_i, \qquad i = 1, ...n$$

$\Lambda\left(\mathbb{R}^n\right)$ אוסף של כל הפונקציות הלינאריות על $\mathbb{R}^n$.

לכל $x \in \Omega$, $\omega\left(x\right)$ פונקציה לינארית

$$\omega\left(x\right) = \omega_1\left(x\right)\pi_1 + ... + \omega_n\left(x\right)\pi_n$$

$$\omega_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

---

f דיפרנציאבילית על Ω. הדיפרנציאל של f:

$$\mathrm{d}f\left(x, \xi\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right)\xi_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\xi_n$$

$$\mathrm{d}x_i\left(x\right) = \pi_i$$

$$\boxed{\omega\left(x\right) = \omega_1\mathrm{d}x_1 + ... + \omega_n\mathrm{d}x_n}$$

עבור $2 \le k \le n$

$$\varphi : \left(\mathbb{R}^n\right)^k \to \mathbb{R}$$

$$\left(\mathbb{R}^n\right)^k = \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$$

הערה

זוהי פונקציה מווקטור של ווקטורים - ב$\varphi\left(a_1, ...a_k\right)$, $a_1, ...a_k$ הם ווקטורים ב$\mathbb{R}^n$.

הגדרה

פונקציה $\varphi : \left(\mathbb{R}^n\right)^k \to \mathbb{R}$ נקראת k-מולטילינארית אם היא לינארית לפי כל משתנה שלה.
ז"א:

$$\varphi\left(a_1, ...\alpha a + \beta b\right) = \alpha\varphi\left(a_1, ...a, ...a_k\right) + \beta\varphi\left(a_1, ...b, ...a_k\right)$$

הגדרה$\mathbb{R}^n$

פונקציה $\varphi\left(\mathbb{R}^n\right)^k \to \mathbb{R}$ נקראת חילופית אם מתקיים:
לכל $\left(a_1, ...a_k\right)$ אם יש $r \neq s$ כך ש$a_r = a_s$ אזי $\varphi\left(a_1, ...a_k\right) = 0$

למה

אם φ k-מולטילינארית, אז היא חילופית אם ורק אם לכל $r \neq s$ מתקיים

$$\varphi\left(a_1, ...a_r, ...a_s, ...a_k\right) = -\varphi\left(a_1, ...a_s, ...a_r, ...a_k\right)$$

הוכחה

אם $a_r = a_s$, אזי

$$0 = \varphi\left(a_1, ...a_r + a_s, ...a_r + a_s, ...a_k\right) = 2\left(\varphi\left(a_1, ...a_r, ...a_s, ...a_k\right) + \varphi\left(a_1, ...a_s, ...a_r, ...a_k\right)\right)$$

למה

תהי φ פונקציה k מולטילינארית. אזי

$$\varphi\left(a_1,...a_k\right)=\sum_{i_1,...i_k=1}^{n}\varphi\left(e_{i_1},...e_{i_k}\right)a_{i_1}^1a_{i_2}^2...a_{i_k}^k$$

הערה $a_1=\left(a_1^1,a_2^1,...a_n^1\right)$, וכו'

הוכחה

באינדוקציה על k.

$$1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n$$

$$\pi_{i_1...i_k}:\left(\mathbb{R}^n\right)^k\to\mathbb{R}$$

$$\pi_{i_1...i_k}\left(a_1,...a_k\right)=\begin{vmatrix}a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_1}^k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i_k}^1 & \cdots & a_{i_k}^k\end{vmatrix}$$

מתכונות של דטרמיננטות נובע מיד שפונצקציה כזו היא פונקציה חילופית.
נרצה להוכיח שפונקציה כזו היא בסיס במרחב.

משפט

תהי $\varphi:\left(\mathbb{R}^n\right)^k\to\mathbb{R}$ פונקציה k-מולטילינארית וחילופית. אזי

$$\varphi\left(a_1,...a_k\right)=\underbrace{\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}\varphi\left(e_{i_1},...e_{i_k}\right)\pi_{i_1...i_k}\left(a_1,...a_k\right)}_{\tilde{\varphi}\left(a_1,...a_k\right)}$$

הוכחה

נשתמש בלמה.

$$\left(\varphi-\tilde{\varphi}\right)\left(a_1,...a_k\right)=\sum_{i_1,...i_k=1}^{n}\left(\varphi-\tilde{\varphi}\right)\left(e_{i_1},...e_{i_k}\right)a_{i_1}^1,...a_{i_k}^k$$

$$=\sum_{1\leq j_1<...<j_k\leq n}\left(\varphi-\tilde{\varphi}\right)\left(e_{i_1},...e_{i_k}\right)a_{j_1}^1,...a_{j_k}^k$$

$$1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n$$

$$\tilde{\varphi}\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right) = \varphi\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right)$$

כלומר, הלמה נתנה לנו שבמקום לבדוק את השוויון לעל ווקטור, מספיק לבדוק עבור ווקטורי היחידה.

$$j = (j_1, ...j_k), \qquad i = (i_1, ...i_k)$$

$$\pi_i\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

זה נכון כי קל לראות שאם $i \ne j$, נקבל שורת אפסים במטריצה של הפונקציה π.
לפי הגדרה:

$$\tilde{\varphi}\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right) = \sum_i \varphi\left(e_{i_1}, ...e_{i_k}\right) \pi_i\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right) = \varphi\left(e_{j_1}, ...e_{j_k}\right)$$

הגדרה

תזכורת: $\Lambda\left(\mathbb{R}^n\right)$ אוסף של כל הפונקציות הלינאריות מ־$\mathbb{R}^n$

עבור $2 \le k \le n$, נגדיר את $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ כאוסף של כל הפונקציות ה־k־מולטילינארית מ־$\left(\mathbb{R}^n\right)^k$.

הגדרה

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. העתקה $\omega : \Omega \to \Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ נקראת תבנית־k דיפרנציאלית.

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \omega_{i_1 ... i_k}(x)\, \pi_{i_1 ... i_k}$$

נשתמש בסימון $\wedge$ בתור מכפלה חיצונית(ניתן גם להשמיט אותו, אבל ככה זה יותר ברור), ונרשום:

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k}(x) = \pi_{i_1, ... i_k}$$

$$\boxed{\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \omega_{i_1 ... i_k}(x)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k}}$$

איך זה נראה ב$\mathbb{R}^3$?

- תבנית 0 - פונקציה רגילה.
- תבנית 1 - $\omega_1 \mathrm{d}x + \omega_2 \mathrm{d}y + \omega_3 \mathrm{d}z$
- תבנית 2 - $\omega_1 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$
- תבנית 3 - $\omega \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

תבנית-2 ב$\mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij}(x) \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

תכונות של $\wedge$

1. אם בקבוצה $\{i_1, ... i_k\}$ יש שני אינדקסים שווים $i_r = i_s, r \neq s$. אזי
$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = 0$$

2.
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

סימונים

$$i = (i_1, ... i_k) \qquad j = (j_1, ... j_l)$$

$$\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$$

הגדרה

נגדיר $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ על ידי

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$$

זוהי תבנית-$(k+l)$

הגדרה

אם $\alpha = \sum\limits_i a_i \mathrm{d}x_i$ תבנית־k ו־$\beta = \sum\limits_j b_j \mathrm{d}x_j$ תכנית־l אזי המכפלה של α ו־β היא תבנית $k+l$ המוגדרת על ידי

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i,j} a_i b_j \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

תזכורת

תהי f תבנית־0. מגדירים

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

הגדרה

אם $\omega = \sum\limits_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1 ... i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ כאשר $\omega_{i_1 ... i_k}$ פונקציות דיפרנציאביליות, אז הדיפרנציאל של ω מוגדר על ידי

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} (\mathrm{d}\omega_{i_1 ... i_k}) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

אם ω תבנית־k אז $\mathrm{d}\omega$ תבנית־$(k+1)$

הקשר לשדות

ב־$\mathbb{R}^3$:

- תבנית־0 $\Leftrightarrow$ שדה סקלרי
- תבנית־1 $\Leftrightarrow$ שדה ווקטורי $\Omega \to \mathbb{R}^3$
- תבנית־2 $\Leftrightarrow$ שדה ווקטורי $\Omega \to \mathbb{R}^3$
- תבנית־3 $\Leftrightarrow$ שדה סקלרי

$\mathrm{grad} \Leftrightarrow$ d(תבנית־0)
רוצים להראות ש־$\mathrm{curl} \Leftrightarrow$ d(תבנית־1)
נניח ש

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

(כאשר P,Q,R פונקציות ממשיות)

$$\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}P)\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge\mathrm{d}y+(\mathrm{d}R)\wedge\mathrm{d}z=$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

עכשיו נרצה להראות ש$\mathrm{div}\Leftrightarrow$(תבנית־2)$\mathrm{d}$:

$$\alpha=A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\alpha=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

משפט סטוקס הכללי

$$\int_M\mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega$$

כאשר M משטח$(k+1)$ מימדי, ו∂M ממימד k.
סטוקס ב$\mathbb{R}^3$ אומר שיש התאמה בין curl ל(תבנית־1)d

ראינו ש

$$\mathrm{curl}\left(\mathrm{grad}\varphi\right)=0$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{curl}\varphi\right)=0$$

כל זה נובע מלמה:

למה

תהי α תבנית־k מ$C^2\left(\Omega\right)$. אזי $\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\alpha\right)=0$

הוכחה

מספיק להוכיח במקרה ש $\alpha = f\mathrm{d}x_{i_1}\wedge...\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ - כלומר לקחת רכיב אחד, ולהוכיח שהוא שווה לאפס.

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\mathrm{d}x_r\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge...\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\alpha\right) = \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r}\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_r\wedge\left(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge...\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r}\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_r + \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_s}\mathrm{d}x_r\wedge\mathrm{d}x_s\right]$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_s}\right)\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_r = 0$$

הגדרה

תבנית דיפרנציאלית ω נקראת מדוייקת אם קיימת תבנית דיפרנציאלית η כזאת ש

$$\mathrm{d}\eta = \omega$$

הגדרה

תבנית דיפרנציאלית ω כזאת ש$\mathrm{d}w = 0$ נקראת תבנית סגורה.

מסקנה

כל תבנית C^1 מדוייקת היא תבנית סגורה:

$$\omega = \mathrm{d}\eta \Rightarrow \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\eta\right) = 0$$

ההפך לא נכון!

דוגמה לכך שההפך לא נכון

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

ω סגורה:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{y^2 - x^2}{\left(y^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

נגדיר פונקציה $\theta : \mathbb{R}^2 \backslash \left([0, \infty)\right) \to \mathbb{R}$ על ידי

$$\theta\left(x, y\right) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x, y > 0 \\ \hbar + \arctan\frac{y}{x} & x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 2\hbar + \arctan\frac{y}{x} & x > 0, y < 0 \\ {}^{\hbar}\!/_{2} & x = 0, y > 0 \\ {}^{3\hbar}\!/_{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

מתקיים:

$$\mathrm{d}\theta = \omega$$

אבל אם $\mathrm{d}f = \omega$ אזי

$$\mathrm{d}\left(f - \theta\right) = 0 \Rightarrow f = \theta + C$$