תרגול כיתה 11 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

רווח סמך ובדיקת השערות – המשך

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

בדיקת השערות

בבדיקת השערות מתחילים בהשערה סטטיסטית על פרמטר באוכלוסייה.
קיימות 2 השערות משלימות האחת לשניה לגבי פרמטר לא ידוע באוכלוסייה, ורוצים לקבוע מי מהשתיים נכונה.
נסמן:
H_0 = השערת האפס, H_1 = ההשערה האלטרנטיבית.
השערת האפס = מייצגת את המצב הקיים.
ההשערה האלטרנטיבית = מייצגת את המצב החדש.

דחיית השערה אחת משמעותה קבלת ההשערה השנייה.
כדי לדעת האם לדחות או לקבל את השערת האפס נחלק את תחום ערכי ההתפלגות ל- 2 חלקים (לאו דווקא שווים), חלק אחד נקרא אזור הדחייה של H_0 והחלק השני נקרא אזור הקבלה של H_0. הנקודה המפרידה בין השניים היא הנקודה הקריטית (קרוי גם: הערך הקריטי) K.
הפרמטרים הנקבעים ע"י החוקר: רמת מובהקות - α; עוצמת המבחן - $1-\beta$.

<u>השלבים בבדיקת השערות:</u>
1. ניסוח ההשערות.
2. מדידת הסטטיסטי המופיע בהשערה על ידי המדגם (אומד).
3. הקצאת רמת מובהקות (לדוגמה: 1%, 5%, 10%).
4. קביעת אזורי קבלה ואזורי דחיה של H_0 על סמך רמת המובהקות (הנתונה).
5. בדיקה אם האומד נמצא באזור הקבלה או הדחיה של H_0 והחלטה בהתאם.

<u>טעויות בבדיקת השערות</u>

מציאות / החלטה	H_0 נכונה	H_1 נכונה
קבלת H_0	<u>החלטה נכונה</u>	טעות מסוג שני β
קבלת H_1	טעות מסוג ראשון α (רמת מובהקות)	<u>החלטה נכונה</u> (עוצמת המבחן = $\pi=1-\beta$)

הקשר בין רווח סמך ובדיקת השערות

רווח סמך ברמת בטחון $(1-\alpha)$ הוא גם איזור הקבלה של מבחן השערות דו-כיווני ברמת מובהקות α.

בדיקת השערות עבור *תוחלת* האוכלוסיה, כאשר *שונותה ידועה*

<u>בדיקת השערות</u>: נסמן- μ_0 – ממוצע האוכלוסייה הקיים (השערת האפס).

מבחן ההשערות: $\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu >,<,\neq \mu_0 \end{cases}$

סטטיסטי המבחן: $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z$

<u>בדיקת השערות עבור *תוחלת* האוכלוסיה, כאשר *שונותה אינה ידועה*</u>

נסמן את סטיית התקן המדגמית: $S=\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}}$

<u>בדיקת השערות</u>: נסמן- μ_0 – ממוצע האוכלוסייה הקיים (השערת האפס).

סטטיסטי המבחן: $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$

<u>בדיקת השערות לפרופורציה באוכלוסיה</u>

p – פרופורציית התכונה באוכלוסייה. $\hat{p}=x/n$ – פרופורציה מדגמית.

<u>בדיקת השערות</u>: עבור $H_0: p=p_0$ – סטטיסטי המבחן: $Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

<u>שאלה 1</u>

בנבחרת ריצה הזמן הממוצע של הרצים במירוץ 60 מ', הוא 7.6 שניות עם סטיית תקן של 1.4.
המאמן מציע שיטת אימון חדשה. השיטה החדשה נבדקה על מדגם בגודל 16 תלמידים והתקבל שזמן הריצה הממוצע ירד ל- 6.9 שניות.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיטת האימון החדשה עדיפה על הקיימת.

פתרון:

צריך לבצע מבחן חד-כיווני שמאלי לכך שממוצע האוכלוסייה (נבחרת הריצה) ירד.

הנתונים: $\mu_0=7.6,\ \sigma=1.4,\ n=16,\ \bar{X}=6.9,\ \alpha=0.05$

השערות המבחן: $\begin{cases}H_0:\mu=7.6\\H_1:\mu<7.6\end{cases}$

נמצא את הערך הקריטי: $\frac{K-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim Z_{1-\alpha}\Rightarrow K=\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=7.6-1.645\cdot\frac{1.4}{4}=7.02425$

מכיוון שמתקיים- $\bar{X}=6.9<7.02425$ <= לכן דוחים H_0 בר"מ 5%.
קיבלנו שברמת מובהקות של 5% השערת האפס תידחה ,כלומר ניתן להסיק ששיטת האימון החדשה עדיפה על שיטת האימון הנוכחית (מקבלים H_1).

<u>שאלה 2</u>

להלן נתונים על משקלם (בגרמים) של 12 עכברים אשר הואכלו במשך 28 ימים בשמן דגים:

24, 23.5, 24, 24, 25, 22.5, 20, 23.5, 28.5, 18, 20, 26

ידוע שמשקל ממוצע של עכבר רגיל מסוג זה הוא 22 גרם.

רוצים לבדוק את ההשערה ששמן דגים משפיע באופן מובהק על משקל העכבר הממוצע ברמת מובהקות $\alpha=0.05$. נסח ובצע את המבחן והסק את המסקנות.

פתרון:

ברצוננו לבדוק את ההשערות:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 22 \\ H_1 : \mu \neq 22 \end{cases}$$

כאשר השונות לא ידועה.

נשתמש במבחן דו צדדי, אנו מבקשים לבדוק קיום השפעה שלא ידוע לנו כיוונה:

דחה H_0 אם $\bar{x} < \mu_0 - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ -או- $\bar{x} > \mu_0 + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

נחשב: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 23.25,\ \mathrm{S} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.848$.

הערך המתאים מטבלת t: $(1-\alpha = 0.95,\ n = 12)$ <= $t_{12-1,1-\alpha/2} = t_{11,0.975} = 2.201$

נבדוק האם- $\boxed{23.25} = \bar{x} \overset{(?)}{>} \mu_0 + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 22 + 2.201 \cdot \frac{2.848}{\sqrt{12}} = \boxed{23.81}$.

הכיוון השני: $\boxed{23.25} = \bar{x} \overset{(?)}{<} 22 - 2.201 \cdot 2.848 \big/ \sqrt{12} = \boxed{20.19}$

אי השוויון לא מתקיים <= ולכן <u>לא נדחה</u> את השערת האפס.

(הערה: במקרה זה די ברור שגם הכיוון השני לא מתקיים, אבל במקרה של ספק – חובה לבדוק).

המסקנה: האכלה בשמן דגים לא משנה באופן מובהק (סטטיסטית) את משקל העכברים.

<u>שאלה 3</u>

מניסיון העבר ידוע כי ההסתברות לנביטת זרע של חיטה אפריקאית היא 80%. חוקר מציע שיטה חדש שלטענתו עשויה להעלות את אחוז הנביטה ל- 90%. הוחלט להפעיל את השיטה על מדגם מקרי של 50 זרעים. בתום הניסוי התברר כי 42 זרעים נבטו.

בדוק בר"מ 5% האם שיטת החוקר אכן יעילה.

פתרון:

$X \sim Bin(50, p)$ – מספר הזרעים שנבטו.

$p_0 = 0.8, \qquad p_1 = 0.9, \qquad n = 50, \qquad \hat{p} = 42/50 = 0.84$

השערות המבחן החד-צדדי ימני לפרופורציה:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.8 \\ H_1 : \mu_1 > 0.8 \end{cases}$$

$$K = p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.8 + 1.65 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{50}} = 0.893$$

$\hat{p} = 0.84 < 0.893$ $\Leftarrow$ לכן לא דוחים את H_0 (מקבלים את השערת האפס) בר"מ 5% <=

המסקנה ששיטת החוקר איננה יעילה.

<u>רווח סמך ובדיקת השערות ל*הפרש תוחלות* כאשר השונויות באוכלוסיות ב"ת – *ידועות*</u>

רווח סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור $\left(\mu_1-\mu_2\right)$ כאשר השונויות ידועות:

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\le\left(\mu_1-\mu_2\right)\le\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

או בכתיב אחר: $\boxed{\left(\mu_1-\mu_2\right)\in\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)\pm Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

סטטיסטי המבחן: $z_{\bar{X}-\bar{Y}}=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)_{H_0}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$

המבחן הדו-צדדי: $\boxed{\mu_0\pm Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ [במבחן החד-צדדי נשתמש ב-$(1-\alpha)$]

<u>רווח סמך ל*הפרש תוחלות* כאשר השונויות באוכלוסיות ב"ת – *אינן ידועות אך שוות*</u>

האומד לשונות- $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

רווח הסמך: $\boxed{\left(\mu_1-\mu_2\right)\in\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)\pm t_{(n_1+n_2-2);1-\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{X}-\bar{Y}}=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)_{H_0}}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)}}\sim t_{n_X+n_Y-2,\alpha}$

המבחן הדו-צדדי: $\boxed{\mu_0\pm t_{(n_1+n_2-2);1-\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ [במבחן החד-צדדי נשתמש ב-$(1-\alpha)$]

<u>רווח סמך ל*הפרש תוחלות* כאשר השונויות באוכלוסיות ב"ת – *אינן ידועות ואינן שוות*</u>

S_1^2,S_2^2 – האמדים לשונויות.

$df=\dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$ – דרגות חופש (בקירוב. יש לעגל התוצאה למס' שלם)

רווח הסמך: $\boxed{(\mu_1-\mu_2)\in\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)\pm t_{(df);1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$

המבחן הדו-צדדי: $\boxed{\mu_0\pm t_{(df);1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$ [במבחן החד-צדדי נשתמש ב-$(1-\alpha)$]

<u>שאלה 4</u>

במחקר הושוו ההישגים הלימודיים במבחן בהבנת הנקרא בין שתי כיתות. בכיתה א' יש 42 תלמידים, ממוצע המבחן היה 81 עם סטיית תקן של 4. בכיתה ב' יש 34 תלמידים, ממוצע המבחן היה 78 עם סטיית תקן 6.

א. בנה רו"ס להפרש תוחלות הציונים בשתי הכיתות, ברמת בטחון של 90%.
ב. טוענים כי ההפרש בין הציונים הממוצעים בין שתי הכיתות שווה ל- 6. השתמש ברו"ס שבנית כדי לאושש או להפריך זאת.

פתרון:

א). נסמן- $\bar{X}_1$ – ממוצע הציונים בכיתה א'; $\bar{X}_2$ – ממוצע הציונים בכיתה ב'.

השונויות ידועות בשתי האוכלוסיות.

$$\sigma_1=4,\sigma_2=6,n_1=42,n_2=34,\bar{X}_1=81,\bar{X}_2=78$$

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=81-78=3$$

$$1-\alpha=0.90\Rightarrow\alpha=0.10\Rightarrow1-\alpha/2=0.95\Rightarrow Z_{0.95}=1.645$$

רווח הסמך:

$$D=Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=Z_{0.95}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=1.645\cdot\sqrt{\frac{16}{42}+\frac{36}{34}}=1.974$$

לכן, ברמת בטחון 90%, ההפרש נמצא ברו"ס:

$$3-1.974\le(\mu_1-\mu_2)\le3+1.974\qquad\Rightarrow1.026\le(\mu_1-\mu_2)\le4.974$$

ב). ההשערות לבדיקה הן:

$$\begin{cases}H_0:\mu_1-\mu_2=6\\H_1:\mu_1-\mu_2\neq6\end{cases}$$

$$1.026\le(\mu_1-\mu_2)\le4.974\qquad\Rightarrow(1.026-6)=-4.974\le(\mu_1-\mu_2)-6\le(4.974-6)=-1.026$$

מכיוון שרו"ס אינו כולל את 0 <= ההפרש בין התוחלות $(\mu_1-\mu_2)$ שונה באופן מובהק מ-6.

באופן כללי ניתן לומר <u>שההפרש</u> בין התוחלות, ברמת ביטחון 90%, הוא בין 1.026 לבין 4.974. (כפי שמצאנו בסעיף א'). מכיוון שרו"ס זה אינו כולל את 6, ניתן לקבוע מיד שהפרש התוחלות בין שתי הכיתות שונה מ-6.

<u>שאלה 5</u>

מפעל מייצר שני סוגי נורות. מעוניינים לבדוק האם אורך החיים הממוצע של נורות מסוג א' גדול ב- 5 שעות מאורך החיים הממוצע של נורות סוג ב'. לשם כך דגמו באופן מקרי 10 נורות מסוג א' ונמצא כי אורך החיים הממוצע שלהן הוא 1120 שעות, עם סטיית תקן (מדגמית) של 125 שעות. לאחר מכן דגמו 8 נורות מסוג ב' ונמצא כי אורך החיים שלהן הוא 1100 שעות, עם סטיית תקן (מדגמית) של 130 שעות.

א. בהנחה כי שונות אורך החיים של שני סוגי הנורות שוות. בנו רו"ס מתאים להפרש אורך החיים הממוצע של שני סוגי הנורות, בר"מ 5%.
ב. בהנחה כי שונות אורך החיים של שני סוגי הנורות שונה. בנו רו"ס מתאים להפרש אורך החיים הממוצע של שני סוגי הנורות, בר"מ 5%.

פתרון:

$\bar{X}_1$ – ממוצע אורך חיים של נורה סוג א'

$\bar{X}_2$ – ממוצע אורך חיים של נורה סוג ב'

$$n_1=10,\ \bar{X}_1=1120,\ S_1=125,\ n_2=8,\ \bar{X}_2=1100,\ S_2=130$$

השערות המבחן: $\begin{cases} H_0: \mu_1-\mu_2=5 \\ H_0: \mu_1-\mu_2\neq 5 \end{cases}$

<u>השונויות אינן ידועות בשאלה זו</u>. בסעיף א' – ההנחה שהן שוות. בסעיף ב' – ההנחה שאינו שוות.

א). כאשר השונויות שוות של שתי האוכלוסיות, נשתמש בנוסחת האומד לשונות -

$$S_p=\sqrt{\frac{9\cdot125^2+7\cdot130^2}{109+8-2}}=127.21$$

$$t_{16;0.975}=2.12$$

נציב בנוסחה המתאימה למציאת הנקודות הקריטיות של המבחן:

$$K_1=5-2.12\cdot127.21\cdot\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=-122.92$$

$$K_2=5+2.12\cdot127.21\cdot\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=132.92$$

$$-122.92<\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)=20<132.92$$

<= לכן לא דוחים את H_0 בר"מ 5%.

רווח הסמך: $20\pm2.12\cdot127.21\cdot\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=20\pm127.92$

ב). כאשר השונויות שונות של שתי האוכלוסיות:

נשתמש בנוסחה המקורבת למציאת דרגות החופש (את התוצאה יש לעגל למס' שלם) -

$$df=\frac{\left(\frac{125^2}{10}+\frac{130^2}{8}\right)^2}{\frac{1}{9}\left(\frac{125^2}{10}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{130^2}{8}\right)^2}=14.86\Rightarrow15 \qquad \Rightarrow t_{15;0.975}=2.13$$

נציב בנוסחאות המתאימות למציאת הערכים הקריטיים:

$$K_1 = 5 - 2.13 \cdot \sqrt{\frac{125^2}{10} + \frac{130^2}{8}} = -124.12 \quad ; K_2 = 5 + 2.13 \cdot \sqrt{\frac{125^2}{10} + \frac{130^2}{8}} = 134.12$$

$-124.12 < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) = 20 < 134.12$ <= לכן גם הפעם לא דוחים את H_0 בר"מ 5%.

רווח הסמך: $20 \pm 2.13 \cdot \sqrt{\frac{125^2}{10} + \frac{130^2}{8}} = 20 \pm 129.12$

<u>שאלה 6</u>

חוקר השתמש במדגם בגודל n לבדוק בר"מ של 1% את ההשערות:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 200 \\ H_1 : \mu \neq 200 \end{cases}$$

א. מאותו מדגם בנה החוקר רו"ס עבור הפרמטר μ ברמת בטחון של 99% וקיבל: [197.22, 200.98]. האם הוא ידחה את H_0?

ב. החוקר ערך מבחן השערות חד-צדדי ימני, עבור ר"מ α מסוימת וקיבל תוצאה שלא דוחה את ההשערה, אך גדולה מתוחלת האוכלוסייה תחת השערת האפס. הוא מעוניין לבצע מבחן השערות דו-צדדי, באותה ר"מ α. האם ניתן לומר משהו על תוצאות המבחן שיערוך מבלי לדעת את ערך α?

פתרון:

א). מאחר ו- 200 נמצא בתוך רווח הסמך החוקר לא ידחה את H_0 בר"מ 1%.
(אפשר לראות זאת מנוסחת רו"ס והשוואתה למבחן השערות דו-צדדי).

ב). אין צורך לדעת את ערך α. מכיוון שלא דחינו את ההשערה במבחן חד-צדדי ימני והתוצאה גם גדולה מהתוחלת, ברור שלא נדחה עבור מבחן דו-צדדי.