תרגיל בית 8 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1 (וידוא הגדרות). יהי R חוג ותהי M חבורה חיבורית. נניח שנתונה פעולה בינארית $\psi\colon R\times M\to M$ שנסמן אותה $\psi(r,m)=rm$ לאיברים $r\in R$, $m\in M$. נגדיר על החבורה האבלית $R\oplus M$ פעולת כפל לפי

$$(r+m)(r'+m')=rr'+rm'$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את $R\oplus M$ לחוג אם ורק אם ψ הופכת את M למודול מעל R.

שאלה 2. יהי R חוג, ויהי $x\in R$. הוכיחו שיש איזומורפיזם של מודולים $Rx\cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$.

שאלה 3. יהי R חוג ויהיו אידאלים שמאליים $L,L'\leq_l R$. בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם R חילופי, אז $R/L\cong R/L'$ איזומורפיים כמודולים מעל R אם ורק אם $L=L'$.
הפריכו את המסקנה אם R אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור $R=M_2(\mathbb{Q})$, $L=Re_{11}$ ו-$L'=Re_{22}$.

שאלה 4. יהי R תחום ראשי, ותהינה מטריצות $A\in M_n(R)$ ו-$B\in M_m(R)$. נתבונן במטריצת הבלוקים

$$A\oplus B=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\in M_{n+m}(R)$$

הוכיחו $M_{A\oplus B}\cong M_A\oplus M_B$ כמודולים מעל R.

שאלה 5. יהי M מודול מעל חוג R. תת־מודול $N\leq M$ יקרא חיוני (לפעמים נקרא גדול) אם לכל תת־מודול $\{0\}\neq H\leq M$ מתקיים $N\cap H\neq\{0\}$. נסמן תת־מודול חיוני $N\leq_e M$.

א. הוכיחו שאם $N_1,N_2\leq_e M$, אז $N_1\cap N_2\leq_e M$.

ב. הוכיחו כי $N\leq M$ הוא תת־מודול חיוני אם ורק אם לכל $0\neq a\in M$ קיים $r\in R$ כך ש-$ra\neq 0$ ו-$ra\in N$.

ג. העזרו בלמה של צורן כדי להוכיח שלכל תת־מודול $N\leq M$ קיים תת־מודול $K\leq M$ כך שמתקיים
$$N\oplus K\leq_e M$$

שאלה 6. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית

$$G=\left\langle a,b\ \middle|\ \begin{aligned}88a+20b&=0\\-212a-56b&=0\end{aligned}\right\rangle$$

שאלה 7. מצאו את הגורמים המשתמרים מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המודול $M_A = \mathbb{Z}^3/A\cdot\mathbb{Z}^3$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

שאלה 8. יהי R חוג חילופי, ויהי M מודול מעל R.

א. הוכיחו שאם M חופשי, אז $\mathrm{Tor}(M) = \mathrm{Ann}_R(M) = 0$.

ב. הוכיחו שאם כל אידאל $I \lhd R$ הוא חופשי כמודול מעל R, אז R הוא תחום ראשי.

שאלות אתגר לשעות הפנאי

שאלה 9. נאמר שחבורה אבלית A היא בעלת פיתול-p אם לכל $a \in A$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$p^n a = 0$.
זוכרים את חוג השלמים ה-p-אדיים $\mathbb{Z}_p$? הוכיחו שכל חבורה אבלית עם פיתול-p היא מודול מעל $\mathbb{Z}_p$.

שאלה 10 (צורת סמית'). יהי D עבורו $\mathcal{O}_D$ הוא תחום ראשי. כתבו תוכנה שמקבלת מטריצת יחסים $A \in M_n(\mathcal{O}_D)$ של מודול נוצר סופית מעל $\mathcal{O}_D$ ומחזירה מטריצות $D, P, Q \in M_n(\mathcal{O}_D)$ כך ש-$D = PAQ$ ו-$D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ היא מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון שלה הם הגורמים המשתמרים של A שמקיימים $d_1 | \ldots | d_n$.
אפשר וכדאי להעזר בספריות תוכנה המממשות מטריצות מעל חוג כלשהו, ובתוכנה שכתבתם עבור תרגיל הבית הקודם.
מה התוכנה שלכם מחזירה כאשר $\mathcal{O}_D$ אינו תחום ראשי?

בהצלחה!