# התזה של צ'רצ' וטיורינג

צ'רצ' וטיורינג הראו(וזה תופס עד היום) שמכונת טיורינג אינה חלשה מאף מודל חישובי שניתן לחשוב עליו - לא שפות תכנות, לא מחשבים קוונטים, לא מודלים תיאורטיים.

# בעיות שאינן ניתנות לחישוב

יש בעיות שאין שיטה סיסטמטית שניתן לתאר אותה בצורה מסודרת שתחזיר תשובה נכונה לבעיה.

נגדיר את $A_{TM}\left\{ (P,w)|P\left(w\right)=q_{acc}\right\}$ - קבוצת כל הזוגות של מכונת טיורינג ומילה כך שהמכונה מאשר את המילה.

## משפט(קנטור)

עוצמת הממשיים גדולה ממש מעוצמת הטבעיים.

### הוכחה

נראה שאין פונקציה מהטבעיים על הממשיים. נניח שיש פונקציה $f$ כזו ונראה שבסתירה לכך, ישנו $z\in\mathbb{R}$ כך שלא קיים $x\in\mathbb{N}$ עבורו $f\left(x\right)=z$. ניצור את $z$ כמס' בייצוג עשרוני אינסופי התלוי בערכי הפונקציה $f$. ספרת האחדות של $z$ תהיה ספרה השונה מספרת האחדות של $f\left(0\right)$. הספרה הראשונה אחרי הנקודה ב$z$ תהיה שונה מ0,9 ומהספרה הראשונה אחרי הנקודה ב$f\left(1\right)$. באופן כללי הספרה ה$i$ אחרי הנקודה ב$z$ תהיה שונה מ0,9 והמספרה ה$i$ אחרי הנקודה ב$f\left(i\right)$.

קיבלנו ש$z$ אינו בטווח של $f$. נניח שיש $k\in\mathbb{N}$ כך ש$f\left(k\right)=z$, אבל זה לא ייתכן כי $f\left(k\right)$ ו$z$ שונים בספרה ה$k$ אחרי הנקודה ולא ייתכן שהם ייצוגים שונים של אותו המספר(שכן ב$z$ אין לא 0 ולא 9)

## משפט

$A_{TM}$ אינה כריעה.

### הוכחה

נחשוב על ערכי השייכות ל$A_{TM}$ כאילו הם מסודרים בטבלה שבה יש שורה לכל מכונה(שמיוצגת ע"י מחרוזת) ועמודה לכל מחרוזת, ובתא בטבלה יש $T$ אם המכונה מאשרת את המחרוזת. נניח בשלילה ש$A_{TM}$ כריעה ולכן קיימת תכנית $D_{A_{TM}}$ שמכריעה אותה. נתבונן בתכנית הבאה:

$S\left(x\right):$

1. הרץ את $D_{A_{TM}}\left(x,x\right)$ והחזר תשובה הפוכה.

מובן שאם $D_{A_{TM}}$ קיימת בהכרח גם $S$ קיימת והיא תכנית חוקית, ולכן חייבת להיות עבור $S$ שורה בטבלה שמתארת את תשובותיה. אבל ניתן לראות שלא תיתכן שורה כזו: נניח שיש $k$ כך ש$S=P_{k}$, אבל

$$S\left(P_{k}\right)=1\Leftrightarrow D_{A_{TM}}\left(P_{k},P_{k}\right)=0\Leftrightarrow P_{k}\left(P_{k}\right)\neq1\Leftrightarrow S\left(P_{k}\right)\neq1$$

כלומר $S$ אינה בטבלה בסתירה לכך שהיא תכנית חוקית $\Leftarrow$ $D_{A_{TM}}$ אינה יכולה להתקיים.