

תרגיל 9 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. יהי E שדה פיצול של $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש $[E : \mathbb{Q}]$ אי זוגי. הוכיחו כי כל שורשי $f(x)$ ממשיים. רמז: חשבו על הצמדה מרוכבת.

2. נסמן $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. חשבו את

$$[\mathbb{Q}(2\rho + \sqrt[3]{25}) : \mathbb{Q}]$$

רמז: העזרו בשאלה 1 משבוע שעבר

3. חישבנו בכיתה את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}$. שימו לב ש $\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{5}} = i \in \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}})$. חשבו את חבורת גלואה של

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}(i)$$

רמז: שימו לב שהיא תת חבורה של החבורה שחישבנו בכיתה.

4. יהי $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ ו $g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$. ראינו כבר בעבר כי לשני פולינומים אלו יש אותו שדה פיצול $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ נסמן $G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$. כמובן שחבורת גלואה פועלת על השורשים של $f(x), g(x)$. הראו כי הפעולות לא איזומורפיות. (בשפה פשוטה: לא משנה איך ממספרים את השורשים, הפעולות שונות).

רמז: זכרו כי השורשים של $f(x)$ הם $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$.