פתרון תרגיל 3

שאלה 1: (א) $\{e_G\} \times G \leq G \times G$

נראה ש $f : G \times G \to G$ המוגדר ע"י $f(x,y) = x$ הוא הומומורפיזם:
$f\left((x_1,y_1)(x_2,y_2)\right) = f\left((x_1x_2, y_1y_2)\right) = x_1x_2 = f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)$.
כעת נחשב את הגעין:
$Kerf = \{(x,y) \,|\, f(x,y) = e\} = \{(x,y) \,|\, x = e\} = \{(e,y) \,|\, y \in G\} = \{e\} \times G$

(ג) $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (רמז: $a \mapsto a(mod\, n)$).
נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת $f(a) = a(mod\, n)$.
ידוע ש $(a+b)mod\, n = (amod\, n + bmod\, n)mod\, n$ ולכן זהו הומומורפיזם.
נחשב את הגרעין:
$Kerf = \{a \in \mathbb{Z} \,|\, f(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{Z} \,|\, a(mod\, n) = 0\} = \{a \,|\, a = nk\,,\, k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$.

שאלה 2: הוכיחו $Z(G) \trianglelefteq G$ (עדיף לא בעזרת גרעין של הומומורפיזם).
יהי $g \in G$, נראה ש $gZ(G) = Z(G)g$.
$gZ(G) = \{gx \,|\, x \in Z(g)\} = \{xg \,|\, x \in Z(G)\} = Z(G)g$.
השיווין האמצעי נכון כי $gx = xg$ לכל $x \in Z(G)$.

שאלה 3: נראה $H \cap K \trianglelefteq G$: יהי $g \in G$, מכיוון שהן נורמליות מתקיים $gH = Hg\,,\, gK = Kg$ ולכן $g(H \cap K) = gH \cap gK = Hg \cap Kg = (H \cap K)g$.
נסביר למה $g(H \cap K) = gH \cap gK$: ההכלה בכיוון $\subseteq$ היא ברורה. בכיוון השני: אם $x \in gH \cap gK$ אזי $x = gh$ וגם $x = gk$ לאיזשהם $h \in H\,,\, k \in K$.
מהשיווין $gh = gk$ נקבל (נכפול בg^{-1} משמאל) ש $h = k \in H \cap K$ ולכן באמת $x \in g(H \cap K)$.

שאלה 4: יהי $k \in K$. נשים לב ש $Kk = K = kK$, ו $kN = Nk$ כי N היא נורמלית.
אזי $k(K \cap N) = kK \cap kN = Kk \cap Nk = (K \cap N)k$ ולכן היא נורמלית ב K.
(שימו לב ש $K \cap N$ לא בהכרח נורמלית בG כי עבור $g \in G$ לא בהכרח מתקיים $gK = Kg$.)

שאלה 5: תראו את הקוסטים השמאליים של ת"ח הבאות וקבעו מהו האינדקס שלהם:

(א) $6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{6\mathbb{Z},\, 1+6\mathbb{Z},\, 2+6\mathbb{Z},\, 3+6\mathbb{Z},\, 4+6\mathbb{Z},\, 5+6\mathbb{Z}\}$, $[\mathbb{Z} : 6\mathbb{Z}] = 6$.

(ב) $<9> \leq U_{10}$
לפי לגרנז $[U_{10} : <9>] = 2$, וכן $U_{10}/<9> = \{<9>\,,\, 3<9>\}$.

(ג) $\{0\} \times \mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
לפי לגרנז' $[\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 : \{0\} \times \mathbb{Z}_3] = 3$ ואפשר לראות ש $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3/\{0\} \times \mathbb{Z}_3 = \{\{0\} \times \mathbb{Z}_3,\, (1,0) + \{0\} \times \mathbb{Z}_3,\, (2,0) + \{0\} \times \mathbb{Z}_3\}$.

שימו לב ש
$(x,y) + \{0\} \times \mathbb{Z}_3 = (x,0) + \underbrace{(0,y)}_{\in\{0\}\times\mathbb{Z}_3} + \{0\} \times \mathbb{Z}_3 = (x,0) + \{0\} \times \mathbb{Z}_3$.

שאלה 6:

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.

פתרון: יהא $g \in G$ יוצר אזי $gH \in G/H$ יוצר. הוכחה: יהא $g'H \in G/H$ לפי הגדרת g קיים n כך ש $g' = g^n$ ואז

$$(gH)^n = g^n H = g' H$$

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

פתרון: ניקח חבורה G שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר $H = G$ תת חבורה נורמלית. אזי G/H עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה G אינה ציקלית.

שאלה 7: נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$

פתרון: יהא $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ו $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$. צריך להוכיח כי

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה $G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = \left(g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}\right)$$

כיוון ש H_1 נורמלית נקבל כי $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H_1$ ובגלל ש H_2 נורמלית נקבל כי $g_2 h_2 g_2^{-1} \in H_2$ ולכן

$$\left(g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}\right) \in H_1 \times H_2$$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

פתרון: נגדיר את הומורפיזם ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \to (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1 H_1, g_2 H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של ϕ

$$\begin{aligned}
\ker \phi &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \phi((g_1, g_2)) = 0\} \\
&= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1 H_1, g_2 H_2) = 0\} \\
&= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : g_1 \in H_1, g_2 \in H_2\} = H_1 \times H_2
\end{aligned}$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

שאלה 8: פתרון: יהא $x \in N, y \in K$. מהגדרת N חבורה נורמאלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

שאלה 9: (א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב G/N (ולכן $G/N = \{g^iN \ : \ 1 \le i \le p\}$)

פתרון: כיוון ש N נורמילית G/N חבורה. כעת יהא $g \in G - N$ אזי $gN \in G/N$ שונה מהאיבר הנטרלי. נסתכל על תת החבורה הנוצרת על ידו $\langle gN \rangle \le G/N$. גודל תת חבורה זאת צריכה לחלק את סדר החבורה $= p$ ולכן גם היא שווה ל p (כי p ראשוני ו $1 < |\langle gN \rangle|$). לכן בקבוצה $\langle gN \rangle = \{g^iN \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ יש p איברים שונים שהם $\{g^iN \ : \ i = 1, \ldots, p\}$ בפרט $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

פתרון: יהא $a, b \in G$. מסעיף קודם נבחר $g \in G - N$ ונקבל כי

$$G = \bigcup_{i=1}^{p} g^iH$$

כי G היא איחוד כל הקוסטים. אזי קיימים i, j כך ש $a \in g^iN, b \in g^jN$ ואזי קיימים $n_1, n_2 \in N$ כך ש

$$a = g^in_1, \ b = g^jn_2$$

כיוון שנתון $N \subseteq Z(G)$ בפרט n_1, n_2 מתחלפים עם כל איבר אחר ב G ואזי

$$ab = g^in_1g^jn_2 = g^ig^jn_1n_2 = g^jg^in_1n_2 = g^jn_2g^in_1 = ba$$

שאלה 10: פתרון: טענה D היא תת חבורה. הוכחה $(e,e)\in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל D. אם $(g_2,g_2),(g_1,g_1)\in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1g_2,g_1g_2)\in D$. אם $(g,g)\in D$ אזי גם ההפוכי שלו $(g^{-1},g^{-1})\in D$. ולכן D תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G\times G\to G$$

ע"י

$$(x,y)\to xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזים. הוכחה:

$$\phi\left((x,y)\,(z,w)\right)=\phi\left((xz,yw)\right)=xz\,(yw)^{-1}=xzw^{-1}y^{-1}=xy^{-1}zw^{-1}=\phi\left((x,y)\right)\phi\left((z,w)\right)$$

בנוסף לכל $g\in G$ ניקח את (g,e) כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker\phi=\{(x,y)\in G\times G:\ \phi(x,y)=e\}=\left\{(x,y)\in G\times G:\ xy^{-1}=e\right\}=\{(x,y)\in G\times G:\ x=y\}=D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

שאלה 11: נקח שני איברים במנה g_1H,g_2H ונראה שהם מתחלפים: $g_1Hg_2H=g_1g_2H=g_2g_1H=g_2Hg_1H$. השיוויון באמצע נובע מכך שהחבורה היא אבלית, השיוויונות בצדדים נובעים מהגדרת הפעולה של חבורת המנה.

הראה שאם G נוצרת ע"י r איברים אזי כל מנה שלה גם נוצרת ע"י r איברים. דהיינו: לכל $H\trianglelefteq G$ חבורת המנה G/H נוצרת ע"י r איברים (אם כי, אולי ע"י פחות).

שאלה 12:

(א) מהו הסדר של 3 בחבורה $\mathbb{Z}$? מהו הסדר של $3+5\mathbb{Z}$ בחבורה $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?
הסדר של 3 ב $\mathbb{Z}$ הוא אינסוף. הסדר של $3+5\mathbb{Z}$ הוא 5 .

(ב) מהו הסדר של 9 בחבורה U_{14}? מהו הסדר של $9H$ בחבורה U_{14}/H כאשר $H=<13>$?
אפשר לראות למשל ש $U_{14}=<3>$ היא מסדר 6, ולכן $9=3^2$ הוא מסדר 3. (לפי נוסחא שראינו פעם).
אפשר לחשב ולראות ש $9H\neq H$, $(9H)^2=9^2H=11H\neq H$, ו- $(9H)^3=H$ ולכן הסדר הוא 3.
[אפשר היה גם לראות ש $|H|=2$ ולכן גודל חבורת המנה הוא $\frac{6}{2}=3$ ולכן הסדר של האיברים יכול להיות 1 או 3. כך שאם $9H\neq H$ אז ברור שהוא מסדר 3 .]

(ג) ובאופן כללי הוכח: תהי חבורה G , H תח"נ ו $g\in G$, הסדר של gH ב G/H שווה למס' הטבעי המינימלי n כך ש $g^n\in H$.
לפי ההגדרה:
$O(gH)=min\{n\in\mathbb{N}\,|\,(gH)^n=e_{G/H}\}=min\{n\in\mathbb{N}\,|\,g^nH=H\}=$ $min\{n\in\mathbb{N}\,|\,g^n\in H\}$
(השיוויון האחרון נובע מכך ש $gH=H$ אמ"ם $g\in H$).

שאלה 13: צריך לחשב מודולו 100. ראשית נשים לב ש- $8073767^{1999}+2011(mod100)=$

$.67^{1999}+11$

נשים לב ש 67 זר ל 100 ולכן נוכל להשתמש במשפט אוילר.

לשם כך נחשב $\varphi(100)=40$, אזי $67^{1999}=67^{40\cdot 49+39}=(67^{40})^{49}\cdot 67^{39}=$
$.67^{39}=67^{-1}$

(שימו לב שאם $67^{40}=1$ זה אומר ש $67^{39}=67^{-1}$.)

למדנו בעבר לחשב את ההופכי ב$\mathbb{Z}_n$, ההופכי של 67 ב $\mathbb{Z}_{100}$ הוא 3

ולכן $67^{-1}+11(mod100)=3+11(mod100)=14(mod100)$.

סכ"ה 2 הספרות האחרונות הן 14.

שאלה 14:

נתבונן בחבורה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. היא מסדר 4 אבל כל האיברים בה הם מסדר ≤ 2 (ראיתם בתרגיל). ולכן, אפילו ש 4 הוא מחלק את סדר החבורה, אין איבר מסדר זה בחבורה.

שאלה 15:

(א) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong G$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi xi}$]

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$\phi:\mathbb{R}\to G$$

ע"י

$$x\mapsto e^{2\pi xi}$$

נראה כי זהו אפימורפיזים: אכן

$$\phi(x_1+x_2)=e^{2\pi(x_1+x_2)i}=e^{2\pi x_1 i}e^{2\pi x_2 i}=\phi(x_1)\phi(x_2)$$

והיא על כי לכל $z\in G$ קיימת לו הצגה פולארית. כלומר $z=e^{2\pi xi}$ עבור $0\leq x<2\pi$ והוא יהיה מקור אפשרי אחד.

לפי משפט האיזו' נקבל כי

$$\mathbb{R}/\ker\phi\cong G$$

נותר להראות כי $\ker\phi=\mathbb{Z}$. אכן

$$\ker\phi=\{x\in\mathbb{R}\,:\,\phi(x)=1\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,e^{2\pi xi}=e^{2\pi 0i}\right\}=\mathbb{Z}$$

כי

$$e^{2\pi x_1 i}=e^{2\pi x_2 i}\iff x_1-x_2\in\mathbb{Z}$$

[זכרו: הפונקציה $e^{2\pi xi}$ מחזורית 2π]

פתרון: הפונקציה

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G$$

המוגדרת ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

היא איזומורפיזים לפי סעיף קודם ובפרט חח"ע. אם נצמצם אותה לקבוצה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אזי נקבל מונומורפיזים

$$\phi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to G$$

המוגדר ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

כיוון ש

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong Img(\phi) \le G$$

נותר לחשב את $Img(\phi)$:

$$Img(\phi) = \{\phi(x+\mathbb{Z}) : x+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\} = \{\phi(x+\mathbb{Z}) : x \in \mathbb{Q}\} = \left\{e^{2\pi xi} : x \in \mathbb{Q}\right\} = \left\{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$$

טענה: $H' = \left\{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\} = H$.

הוכחה: $(\subseteq)$ אם נעלה את $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in H'$ בחזקת b נקבל $\left(e^{2\pi \frac{a}{b} i}\right)^b = e^{2\pi ai} = 1$ ולכן $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in U_b \subset H$

$(\supseteq)$יהא $z \in H$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $z \in U_n$. נרשום $z = e^{2\pi xi}$ ההצגה הפולארית שלו אזי $1 = z^n = e^{2\pi nxi}$ כלומר $nx \in \mathbb{Z}$ מאותו נימוק מסעיף קודם. ומכאן ש $x \in \mathbb{Q}$ ולכן $z = e^{2\pi xi} \in H'$