תרגול 8 - פונקציות

תרגיל:

$f: X \to Y$ פונקציה.

$A \subseteq X$

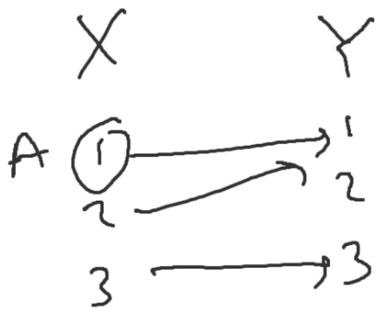
א) $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$

ב) מצאו דוגמה שאין שוויון.

ג) אם f חח"ע יש שוויון.

פתרון:

ב)



$f[A]=\{1\}$

$f^{-1}[\{1\}]=\{1,2\}\neq A$.

א) יהי $a\in A$. $f(a)\in f[A]$

נזכר בהגדרה: $f^{-1}[f[A]]=\{x\in X : f(x)\in f[A]\}$

וכיוון ש-$f(a)\in f[A]$ נקבל מההגדרה ש-$a\in f^{-1}[f[A]]$.

ג) נותר להראות: $f^{-1}[f[A]]\subseteq A$

$$x\in f^{-1}[f[A]]$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{f(x)}_{y}\in f[A]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists a\in A: \quad f(a)=f(x)$$

f חח"ע ולכן $a=x$ ולכן $x\in A$.

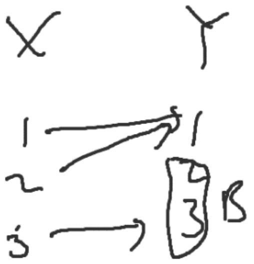
תרגיל:

$B\subseteq Y$

א) $f[f^{-1}[B]]\subseteq B$

ב) הראו שאין שוויון.

ג) אם f על יש שוויון.



$f^{-1}[B]=\{3\}$

$f[\{3\}]=\{3\}$.

תרגיל:

תהא $f: X \to Y$ פונקציה.

נגדיר $g: P(Y) \to P(X)$ ע"י:

$$\forall B \subseteq Y \quad g(B) = f^{-1}[B]$$

הוכיחו: g על $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

פתרון:

$\Rightarrow$ נניח f חח"ע. תהי $A \in P(X)$ $(A \subseteq X)$.

צריך למצוא לה מקור.

כלומר, צריך תת קב' של Y (נסמן B) כך ש

$$\underset{\overset{\|}{f^{-1}[B]}}{g(B)} = A$$

ניקח $\underset{\overset{\Uparrow}{P(Y)}}{B = f[A]}$ ונקבל: $g(B) = f^{-1}[f[A]] \underset{\downarrow}{=} A$

f חח"ע+תרגיל קודם.

$\Leftarrow$ נניח g על. נוכיח f חח"ע.

נניח שלא. לכן יש $x_1 \neq x_2 \in X$

כך ש $f(x_1) = f(x_2)$ ⊛

נגדיר $A = \{x_1\}$.

g על לכן יש מקור $B \in P(Y)$ כך ש

$$g(B) = f^{-1}[B] = A = \{x_1\}$$

ולכן $B = \{f(x_1)\}$ כי $f(x_1)$ הוא

בעצם רק x_1 המקור שלו.

אבל עכשיו $x_2 \in f^{-1}[\{f(x_2)\}] \underset{⊛}{=} f^{-1}[\{f(x_1)\}] = f^{-1}[B]$

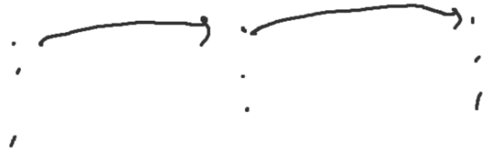
כלומר $x_2 \in f^{-1}[B]$ בסתירה

לכן ש

$$f^{-1}[B] = A = \{x_1\} \underset{x_2 \neq x_1}{\not\ni} x_2$$

הרכבה והפיכה

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$



$$g\circ f : X \to Z$$

בהגדרה: $f: X\to Y$ הפיכה אם יש $g: Y\to X$ כך ש:

$$g\circ f = I_X \quad , \quad f\circ g = I_Y$$

תרגילים:

א מי מהבאות הפיכה:

① X קב. $f: P(X)\to P(X)$ המוגדרת

$$f(A) = A^c = X\setminus A$$

פתרון: כן. ההופכית היא $f^{-1}: P(X)\to P(X)$

$f^{-1}(A) = f(A) = A^c$ כלומר $f^{-1}=f$

ואכן:

$$f\circ f(A) = f(A^c) = (A^c)^c = A$$

$$f\circ f = I_A$$

② X קב. $B\subseteq X$. $f: P(X)\to P(X)$

המוגדרת $f(A) = A\setminus B$.

פתרון: לאו דוקא. נמצא דוג' שלא:

$$X = \{1,2,3\} \ , \ B=\{2\}$$

מספיק להראות לא חח"ע או לא על:

$$f(\emptyset) = \emptyset\setminus\{2\} = \emptyset = \{2\}\setminus\{2\} = f(\{2\})$$

ולכן f לא חח"ע ולכן לא הפיכה.

ובנוסף ($\{2\}$ אין מקור.

① X קב' $B\subseteq X$. $f:P(X)\to P(X)$

$$f(A)=A\triangle B$$

הפיכה: נראה ש f ההופכית של עצמה:

$$f\circ f(A)=f(f(A))=f(A\triangle B)=(A\triangle B)\triangle B$$

נניח שראינו בהרצאה שהפרש סימטרי אסוציאטיבי ונקבל

$$=A\triangle\underbrace{(B\triangle B)}_{\emptyset}=A$$

② מצאו $A,B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $\sin:A\to B$ הפיכה, עם B גדולה ככל הניתן.

פתרון:

$$A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$B=[-1,1]$$

③ תהיינה f,g כך שההרכבה מוגדרת ומתקיים: $g\circ f\circ g=I$. הוכיחו/הפריכו: f הפיכה.

פתרון:
1) $(g\circ f)\circ g=I$
2) $g\circ(f\circ g)=I$

הערה: מ 1) נקבל g חח"ע, 2) נקבל g על $\Rightarrow$ g הפיכה.

(ההרכבה חח"ע $\Rightarrow$ ימנית חח"ע; על $\Rightarrow$ שמאלית על)

כלומר נוכל להרכיב מימין ומשמאל את g^{-1} ונקבל:

$$f=\underbrace{g^{-1}\circ g}_{I}\circ f\circ\underbrace{g\circ g^{-1}}_{I}=g^{-1}\circ I\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g^{-1}$$

לכן f הפיכה כהרכבה של הפיכות.

④ נניח $f\circ g$ הפיכה. האם f,g הפיכות?

לא דווקא:

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \overset{g}{\mapsto} 2n$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{זוגי } n \\ n & \text{אי זוגי} \end{cases}$$

$f \circ g = I$

אך שתיהן לא הפיכות (f על, לא חח"ע, g לא על)

תרגיל:

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה.

נגדיר $F: \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$

ע"י $F(f) = g \circ f$

הוכיחו: g הפיכה $\Leftrightarrow$ F הפיכה.

$\Leftarrow$ נניח g הפיכה. לכן יש $g^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

נגדיר $G: \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$

ע"י $G(f) = g^{-1} \circ f$

$$G \circ F(f) = G(g \circ f) = \underbrace{g^{-1} \circ g}_{I} \circ f = f$$

$$F \circ G(f) = F(g^{-1} \circ f) = \underbrace{g \circ g^{-1}}_{I} \circ f = f$$

ולכן

✓ $G \circ F = F \circ G = I$

$\Rightarrow$ נניח F הפיכה. נראה ש g חח"ע ועל.

חח"ע: נניח $g(n) = g(m)$

נגדיר f_1, f_2:

$\forall k \in \mathbb{N}: f_1(k) = n, f_2(k) = m$

שימו לב:

$$\forall k: F(f_1)(k) = (g \circ f_1)(k) = g(f_1(k)) = g(n)$$

$$\Vert$$

$$F(f_2)(k) = (g \circ f_2)(k) = g(f_2(k)) = g(m)$$

קיבלנו $F(f_1)$, $F(f_2)$

שווה לכל k ולכן הן אותה

פונקציה. כלומר

$$F(f_1) = F(f_2)$$

$$\Downarrow \text{ F חח"ע}$$

$$f_1 = f_2$$

$$\Downarrow$$

$n = m$.

יהי $n \in \mathbb{N}$ צריך למצוא m כך ש $g(m)=n$.

F על

אז, לפונקציה הקבועה $h(k)=n$ יש מקור.

כלומר יש $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש

$$h = F(f) = g \circ f$$

בפרט לכל k $g\circ f\,(k) = h(k) = n$

כלומר $g(f(k)) = n$. כלומר $f(k)$ לכל k מקור.

תרגיל:

$f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מקיימות

$$\forall n: f(n) = g(3n-1)$$

הוכיחו: f על $\Leftarrow$ g לא חח"ע.

פתרון: נתבונן ב $\underbrace{g(1)}\in\mathbb{N}$

f על לכן יש מקור ל $g(1)$.

כלומר, יש m כך ש $f(m) = g(1)$

מהנתון נקבל גם $f(m) = g(3m-1)$

כלומר $g(1) = g(3m-1)$

$3m-1 \neq 1$ לכן g לא חח"ע.