

1. השתמשו במשפט ההערכה (חסם  $ML$ ) כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים:

א.  $\left| \int_{\gamma} (e^z - e^{\bar{z}}) dz \right| \leq 2(\pi + 2)e$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה המורכבת משלושת הקטעים

הישרים: מ-1 ל- $1 + \frac{\pi}{2}i$ , מ- $1 + \frac{\pi}{2}i$  ל- $-1 + \frac{\pi}{2}i$  ומ- $-1 + \frac{\pi}{2}i$  ל-1.

ב.  $\left| \int_{\gamma} \frac{2-z}{2+\bar{z}} dz \right| \leq 3\pi + 6$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה המורכבת מחצי המעגל (עם רדיוס 1 ומרכז

באפס) מ-1 ל-1 ומקטע הישר מ-1 ל-1.

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\oint_{\gamma} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$  כאשר  $\gamma$  נתונה לפי  $|z-1|=1$  נגד כיוון השעון.

ב.  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$  נגד כיוון השעון

ג.  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$  נגד כיוון השעון

ד.  $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$  כאשר  $\gamma$  נתונה לפי  $\gamma(t) = it, -1 \leq t \leq 1$

3. השתמשו בנוסחת אינטגרל קושי עבור  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$  ( $k$  קבוע ממשי) בכדי להוכיח ש-

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi \quad \text{ו-} \quad \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

$$\text{א. } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

$$\text{ב. } \int_{|z|=4} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ג. } \int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^2-z} dz$$

$$\text{ד. } \int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

5. בניח כי הפונקציה  $f(z)$  מוגדרת ע"י האינטגרל  $f(z) = \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$ . מצאו את

$$f'(1+i)$$

6. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:  
לכל פונקציה אנליטית,  $f(z)$  ולכל מסילה חלקה  $\gamma$  מתקיים

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma} f(z)dz\right) = \int_{\gamma} \operatorname{Re} f(z)dz$$