פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 6

1. א. משתמשים בנוסחת קושי עם $f(z)=(z+1)^7$ ומקבלים $256\pi i$

ב. משתמשים בנוסחת קושי עם $f(z)=e^z$ ומקבלים $2\pi i$

ג. קודם כל משתמשים בשברים חלקיים $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$. לאחר מכן אפשר להפעיל את נוסחת קושי פעמים עם הפונקציה הקבועה $f(z)\equiv 1$. האינטגרל יוצא אפס.

ד. אין כאן מסלול סגור. אפשר לחשב ישירות. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(it)^2-1}idt=-i\int_{-1}^{1}\arctan(t)\,dt=0$

2. ראשית, אם $a=0$ מקבלים $\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{\rho^2}=\frac{1}{\rho^2}\oint_{|z|=\rho}|dz|=\frac{2\pi\rho}{\rho^2}$, ומכאן נניח ההפך.

$$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=-i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{dz}{z|z-a|^2}=-i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{dz}{z\left(|z|^2-\bar{z}a-z\bar{a}+|a|^2\right)}=-i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{dz}{z\rho^2-\rho^2a-z^2\bar{a}+z|a|^2}$$
$$=i\rho\oint_{|z|=\rho}\frac{dz}{\bar{a}z^2-\left(\rho^2+|a|^2\right)z+a\rho^2}$$

למכנה יש שורשים בנקודות $z_{1,2}=a,\frac{\rho^2}{\bar{a}}$. ניתן לפרק לשברים חלקיים:

$\frac{1}{\bar{a}(z-a)\left(z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}\right)}=\frac{1}{|a|^2-\rho^2}\frac{1}{z-a}-\frac{1}{|a|^2-\rho^2}\frac{1}{z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}}$. אם כך האינטגרל הוא

$\oint_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\frac{i\rho}{|a|^2-\rho^2}\oint_{|z|=\rho}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}}\right)dz$. נשים לב שבכל מקרה רק אחת מבין הנקודות

$a,\frac{\rho^2}{\bar{a}}$ נמצאת בתוך המעגל $|z|=\rho$. (זאת משום שאם $|a|<\rho$ אז $\left|\frac{\rho^2}{\bar{a}}\right|>\frac{\rho^2}{\rho}=\rho$, וגם להפך)

ולכן שימוש במשפט קושי ייתן $2\pi i$ לאחד מהשברים החלקיים, ואפס לשבר השני. מקבלים בסה"כ

$\frac{i\rho}{|a|^2-\rho^2}(2\pi i)=\frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}$.

3. האינטגרל של $\operatorname{Re} z$ על החצי הימני של עיגול היחידה (כולל הקוטר) יוצא $2\neq 0$.

4. ע"פ נוסחת קושי ערך האינטגרל הוא $2\pi i$. מצד שני, חישוב באמצעות פרמטריזציה נותן $2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{e^{k\exp(i\theta)}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} \left(e^{k\cos\theta}\cos\left(k\sin\theta\right) + ie^{k\cos\theta}\sin\left(k\sin\theta\right)\right)d\theta$. ע"י השוואת החלק הממשי והחלק המדומה מקבלים את הדרוש.